

LA TRIGONOMETRIE

I- Généralité :

Branche des **mathématiques** qui étudie les **fonctions circulaires** et, grâce à ces **fonctions**, la « **résolution** » des **triangles**, c'est-à-dire la **détermination** de certains de leurs éléments (**côtés** ou **angles**) en fonction d'autres éléments.

Pour définir les fonctions circulaires, on a recours au **cercle trigonométrique**, de **rayon un**, ayant son centre à l'origine d'un système d'**axes cartésiens orthogonaux** du plan.

Sur le cercle, on choisit un sens positif de parcours, en général le sens inverse des aiguilles d'une montre. Soit alors **t** un nombre réel. A partir du point d'**abscisse 1** sur l'axe **des x**, on tourne dans le sens approprié (positif si **t** est positif, négatif ; si **t** est négatif) jusqu'à ce que l'on ait un arc de longueur **|t|** et on considère le **point P**, extrémité de l'axe décrit : le **sinus** et le **cosinus** du nombre réel **t**, désignés respectivement par **sin t** et **cos t**, sont définis comme étant l'ordonnée et l'abscisse du **point P**.

On a ainsi défini **deux fonctions périodiques**, dont la période est égale à la longueur du cercle de **rayon 1**, c'est-à-dire à **2π**. Soit alors **β** un angle, **t** sa mesure en radians (définie à **2hπ** près) ; on appelle sinus et cosinus de l'**angle β** les sinus et cosinus du nombre **réel t** définissant la mesure de **β** (en **radians**).

On définit ensuite, toutes les **valeurs de t** qui n'annulent pas les dénominateurs respectifs, la **sécante**, $\sec t = 1/\cos t$, la **cosécante**, $\csc t = 1/\sin t$ (l'une et l'autre périodiques et de période **2π**), la **tangente**, $\tan t = \sin t / \cos t$, et la **cotangente**, $\cot t = 1/\tan t$ (l'une et l'autre périodiques et de période **π**).

Il existe, entre les fonctions circulaires, de nombreuses relations. Parmi elles, l'équation fondamentale :

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

les formules d'addition :

$$\sin (x + y) = \cos y \sin x + \sin y \cos x$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan (x + y) = (\tan x + \tan y) / (1 - \tan x \tan y)$$

d'où l'on déduit d'autres formules, comme les **formules de duplication** (obtenues pour **x = y**) et les formules :

$$\sin x - \sin y = 2 \cos (x + y)/2 \sin (x - y)/2$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

Les tables trigonométriques sont des tables numériques qui donnent les valeurs de sinus, cosinus, tangente et cotangente du nombre t (ou de l'angle dont la mesure est t) pour t compris entre 0 et $\pi/2$.

En réalité, les tables ne sont calculées que pour le **premier octant**, c'est-à-dire, entre 0 et $\pi/4$, car on a les équations :

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \cos t,$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \sin t,$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \operatorname{cotg} t,$$

mais elles sont imprimées pour toutes les valeurs de t jusqu'à $\pi/2$. Les calculs de la trigonométrie se font souvent en utilisant les **logarithmes** ; c'est pourquoi les tables donnent aussi en général la valeur déjà calculée du logarithme, pour toutes les fonctions, entre les mêmes limites. La réduction au premier quadrant s'effectue par utilisation des formules :

du **second quadrant**

$$\sin (\pi - t) = \sin t$$

$$\cos (\pi - t) = -\cos t$$

$$\operatorname{tg} (\pi - t) = -\operatorname{tg} t,$$

du **troisième quadrant**

$$\sin (\pi + t) = -\sin t$$

$$\cos (\pi + t) = -\cos t$$

$$\operatorname{tg} (\pi + t) = \operatorname{tg} t,$$

du **quatrième quadrant**

$$\sin (2\pi - t) = -\sin t$$

$$\cos (2\pi - t) = \cos t$$

$$\operatorname{tg} (2\pi - t) = \operatorname{tg} t$$

Les petites machines à calculer ont souvent en mémoire les principales fonctions trigonométriques, en plus des logarithmes, si bien que le recours aux tables se fait de plus en plus rare.

II- Trigonométrie plane :

Partie de la trigonométrie concernant les **triangles plans** ; elle permet de déterminer les **six éléments** du triangle lorsqu'on en connaît **trois** (dont au moins **un côté**). Il existe des relations entre les **trois côtés a, b, c** et les **trois angles α, β, γ** , respectivement opposés aux côtés **a, b, c**.

Les relations sont particulièrement simples dans le cas d'un **triangle rectangle**, dans lequel un côté de l'angle droit est égal au produit de l'**hypoténuse** par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'**angle adjacent** (au côté de l'angle droit), ou encore au produit de l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé au **premier côté**.

Autrement dit, si on désigne par a l'hypoténuse, on a :

$$b = a \sin \beta$$

$$b = a \cos \gamma$$

$$b = c \operatorname{tg} \beta$$

En revanche, si le **triangle est quelconque**, sa résolution est en général plus complexe ; on considère les cas suivants :

- On donne **un côté** et **deux angles** : on utilise le **théorème des sinus**.
- On donne **deux côtés** et **un angle opposé** à l'un des côtés : on utilise le **théorème des sinus**.
- On donne **deux côtés** et **l'angle compris entre eux** : on utilise le **théorème de Carnot**, ou

mieux, celui de **Neper** (qui permet d'utiliser les logarithmes).

- On donne les **trois côtés** : on utilise les **formules de Briggs** (et en particulier la **formule de la**

Tangente, qui donne en général un résultat plus précis). Les formules qui expriment les théorèmes mentionnés ci-dessus sont les suivantes :

théorème des sinus

$$a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$$

théorème de Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

théorème de Neper

$$\left(\frac{a + b}{a - b} \right)^2 = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

formule de Briggs pour la tangente

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

où $P = (a + b + c)/2$

III- Trigonométrie sphérique :

Partie de la trigonométrie concernant les triangles à côtés **curvilignes** tracés sur une **sphère**. Elle permet de résoudre des problèmes analogues à ceux de la trigonométrie plane, c'est-à-dire de déterminer les **six éléments** d'un **triangle sphérique** (dont les côtés sont des grands **cercles** de la **sphère**).

Il est important de remarquer que la somme des **trois angles** d'un triangle sphérique est toujours supérieure à 180° et au plus égale à 270° (**angle sphérique trirectangle**) ; la différence entre la somme des angles et 180° se nomme **excès sphérique**.

Les longueurs des côtés curvilignes étant désignées par **a, b, c**, les angles opposés à ces côtés par **A, B, C**, respectivement (ce sont les angles des tangentes aux côtés du triangle sphérique aux points d'intersection) et les angles exprimés en radians, entre les **trois rayons** joignant le centre de la sphère aux sommets du triangle (et qui sous-tendent respectivement **a, b, c**) par **α, β, γ** , les formules fondamentales de la **trigonométrie sphérique** sont les suivantes :

$$a = R\alpha \quad b = R\beta \quad c = R\gamma$$

$$b + c > a > b - c$$

$$a + b + c < 2\pi R$$

$$2\pi < A + B - C < 3\pi$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos a = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha$$

$$\sin A / \sin \alpha = \sin B / \sin \beta = \sin C / \sin \gamma$$

$$\cotg \alpha \sin \beta = \cot A \sin C + \cos B \cos C$$

Dans le cas où $A + B + C = \pi$

on a

$\frac{1}{2}$

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha \sin B \quad \text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \cos C$$

$$\text{tg } \beta = \sin \gamma \text{ tg } B \quad \cos B = \cos \beta \sin C.$$

La surface d'un triangle sphérique est:

$$R^2 (A + B + C - \pi).$$

Si le triangle est trirectangle, on obtient :

$$\frac{\pi R^2}{2}.$$