LES QUADRILATERES

I- Généralité :

1- Définition :

Un **quadrilatère** est un **polygone** à quatre **côtés**. Deux côtés sont dits consécutifs s'ils concourent en un même **sommet**. Deux côtés non consécutifs sont dits opposés. Les **droites** joignant deux sommets opposés sont les **diagonales**. La somme des **angles** intérieurs d'un quadrilatère vaut 360°.

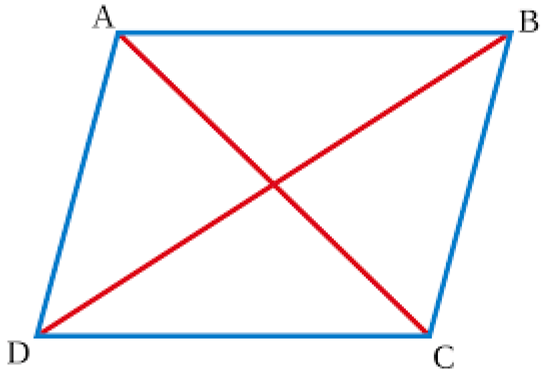
2- Typologie :

Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles est un **parallélogramme**. S'il n'y a que deux côtés parallèles, le parallélogramme est un **trapèze**. Un quadrilatère peut être inscrit dans un **cercle** si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires.

Un quadrilatère peut être circonscrit à un cercle si les sommes des **longueurs** de deux côtés opposés sont égales.

a- Rectangle :

Parallélogramme ayant tous ses angles égaux (donc droits). Les **rectangles** et les **carrés** sont des quadrilatères particuliers.
Les diagonales du rectangle sont égales ; si a et b sont les longueurs de ses côtés, la longueur de la diagonale est : $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un rectangle ou d'un carré ?

Exemple1 : Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Si un quadrilatère est un parallélogramme et a un angle droit au moins, alors ce quadrilatère est un rectangle. Autrement dit, les quatre angles du quadrilatère considéré sont droits.

Exemple 2 : sur la figure 1, AB = CD = 3 cm et BC = AD = 2 cm, donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme puisque ses côtés opposés ont deux à deux la même longueur.

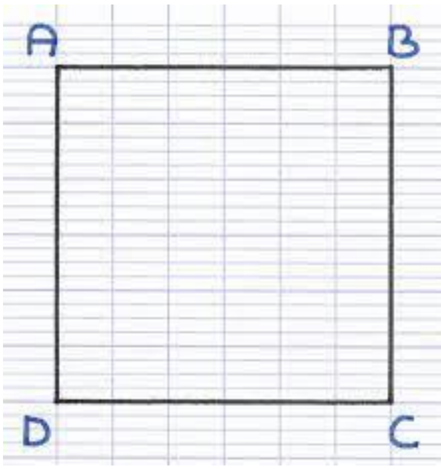
De plus, l'angle Â est droit ; on peut alors affirmer que ABCD est un rectangle.

Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle. Autrement dit, le quadrilatère considéré a nécessairement quatre angles droits.

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.

b- Carré :

Polygone régulier ayant quatre côtés. Il résulte de cette définition qu’un carré a ses angles et ses côtés égaux.



Exemple 1 : Démontrer qu'un quadrilatère est un carré.

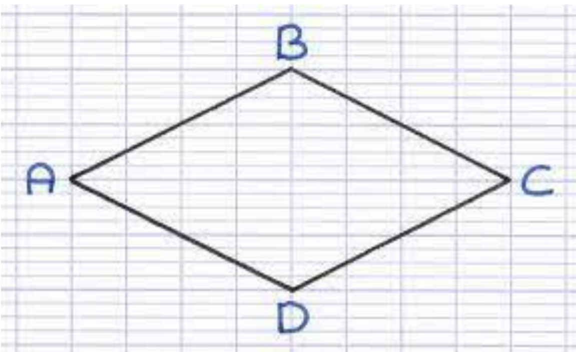
On peut commencer par démontrer que le quadrilatère est un rectangle ou un losange.

Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.

Exemple : sur la figure 4, le quadrilatère ABCD est un rectangle puisqu'il a trois angles droits ; de plus, AB = BC = 3 cm ; ABCD est donc un carré. Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.

c- Losange :

Parallélogramme ayant tous ses côtés égaux. Les diagonales sont les **bissectrices** des angles du losange et sont perpendiculaires entre elles.



Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un losange ?

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.

Si un losange a un angle droit au moins, alors c'est un carré.

Remarque : si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange (puisqu'on sait que les côtés opposés d'un parallélogramme ont deux à deux la même longueur).

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.

si un quadrilatère admet les supports de ses diagonales comme axes de symétrie, alors c'est un losange ;
si les supports des diagonales d'un quadrilatère sont les bissectrices de ses angles, alors ce quadrilatère est un
losange ;

si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.