LE QUADRILATEUR

I- Généralité :

1- Définition :

Un **quadrilatère** est un **polygone** à quatre **côtés**. Deux côtés sont dits consécutifs s'ils concourent en un même **sommet**. Deux côtés non consécutifs sont dits opposés. Les **droites** joignant deux sommets opposés sont les **diagonales**. La somme des **angles** intérieurs d'un quadrilatère vaut 360°.

2- Typologie :

Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles est un **parallélogramme**. S'il n'y a que deux côtés parallèles, le parallélogramme est un **trapèze**. Un quadrilatère peut être inscrit dans un **cercle** si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires.

Un quadrilatère peut être circonscrit à un cercle si les sommes des **longueurs** de deux côtés opposés sont égales.

a- Rectangle :

Parallélogramme ayant tous ses angles égaux (donc droits). Les **rectangles** et les **carrés** sont des quadrilatères particuliers.
Les diagonales du rectangle sont égales ; si a et b sont les longueurs de ses côtés, la longueur de la diagonale est : $\sqrt{}\ a^2 + b^2$.

Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un rectangle ou d'un carré ?

Exemple1 : Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Si un quadrilatère est un parallélogramme et a un angle droit au moins, alors ce quadrilatère est un rectangle. Autrement dit, les quatre angles du quadrilatère considéré sont droits.

Exemple 2 : sur la figure 1, AB = CD = 3 cm et BC = AD = 2 cm, donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme puisque ses côtés opposés ont deux à deux la même longueur.
De plus, l'angle Â est droit ; on peut alors affirmer que ABCD est un rectangle.

Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle. Autrement dit, le quadrilatère considéré a nécessairement quatre angles droits.

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.
Exemple : sur la figure 3, IO = OK = JO = OL ; les diagonales du quadrilatère IJKL ont donc le même milieu O et la même longueur, égale à 2OI par exemple ; donc IJKL est un rectangle.

b- Carré :

Polygone régulier ayant quatre côtés. Il résulte de cette définition qu’un carré a ses angles et ses côtés égaux.

Exemple 1 : Démontrer qu'un quadrilatère est un carré.

On peut commencer par démontrer que le quadrilatère est un rectangle ou un losange.

Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.
Exemple : sur la figure 4, le quadrilatère ABCD est un rectangle puisqu'il a trois angles droits ; de plus, AB = BC = 3 cm ; ABCD est donc un carré.

Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.
Exemple : sur la figure 5, en se référant au codage, on voit que le quadrilatère EFGH est un rectangle puisque ses diagonales ont le même milieu et la même longueur ; de plus, ses diagonales sont perpendiculaires ; EFGH est donc un carré.

c- Losange :

Parallélogramme ayant tous ses côtés égaux. Les diagonales sont les **bissectrices** des angles du losange et sont perpendiculaires entre elles.

Exemple : Démontrer qu'un quadrilatère est un losange

Les losanges sont des quadrilatères particuliers.

Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un losange ?

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.
Les propriétés d'un losange sont symbolisées sur la figure 1.

Si un losange a un angle droit au moins, alors c'est un carré.
***Exemple* :** sur la figure 6, en se référant au codage, on voit que le quadrilatère IJKL est un losange

puisqu'il a quatre côtés de même longueur ; de plus, l'angle $\hat{I}$ est droit ; IJKL est donc un carré.

Si un losange a ses diagonales de même longueur, alors c'est un carré.

***Exemple* :** sur la figure 7, en se référant au codage, on voit que le quadrilatère EFGH est un losange puisque ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires ; comme de plus elles ont la même longueur, EFGH est un carré.

Exemple : sur la figure 2, AB = BC = CD = DA = 3 cm ; donc ABCD est un losange.

Remarque : si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange (puisqu'on sait que les côtés opposés d'un parallélogramme ont deux à deux la même longueur).

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.

***Exemple* :** Sur la figure 3, IO = OK et JO = OL ; donc les diagonales du quadrilatère IJKL ont le même milieu O.

De plus, ces diagonales sont perpendiculaires ; on peut alors affirmer que IJKL est un losange.

Remarque : il revient au même d'énoncer :

si un quadrilatère admet les supports de ses diagonales comme axes de symétrie, alors c'est un losange ;
si les supports des diagonales d'un quadrilatère sont les bissectrices de ses angles, alors ce quadrilatère est un losange ;
si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.