LES POLYGONES

I- Généralité :

1- Définition :

Ligne polygonale fermée ou en partie bornée du **plan**, limitée par une ligne polygonale simple fermée ; les sommets et les côtés de la ligne polygonale sont dits sommets et côtés du polygone.

2- Typologie :

Qu'est-ce qu'un polygone régulier ?

La réponse spontanée est : un polygone dont tous les côtés ont la même longueur ; cependant il existe des polygones non réguliers dont tous les côtés sont de la même longueur.

Quelle est donc la définition d'un polygone régulier ?

Et quelles propriétés utilise-t-on pour construire un pentagone, un hexagone ou un octogone régulier ?
Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur **et** dont tous les angles ont la même mesure.

On dit qu'un polygone est **inscriptible** s'il existe un **cercle** passant par tous ses sommets, **circonscriptible** s'il existe un cercle tangent à tous ses côtés.

On appelle **apothème** d'un polygone circonscriptible le **rayon** du cercle tangent à tous ses côtés. Un polygone **convexe** est dit régulier si tous ses côtés sont égaux ; il est toujours inscriptible et circonscriptible, et les deux cercles sont concentriques.

En **géométrie projective**, on appelle **polygone plan complet** la figure formée par n **points** (sommets) d'un plan tels qu'il n'existe pas trois points sur la même droite, et par n (n-1)/2 droites qui les joignent deux-à-deux de toutes les façons possibles.

On parle de **polygone plan simple** quand les sommets sont dans un ordre déterminé et quand on ne considère que les n droites (**côtés**) qui joignent le premier sommet au second, le second au troisième, …, le dernier au premier.

Cinq polygones réguliers sont représentés sur la figure 1.

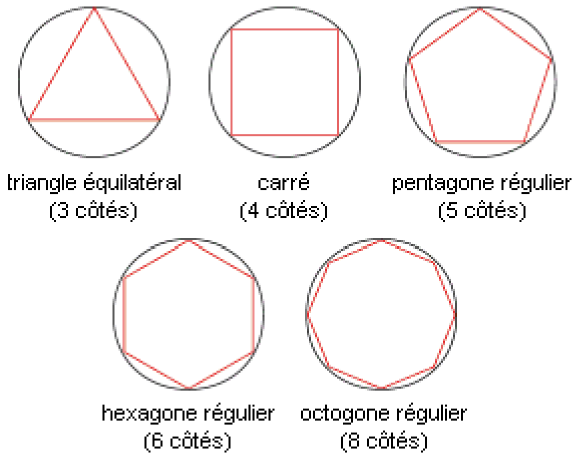


Figure 1

Pour tout polygone régulier, il existe un cercle passant par tous ses sommets appelé **cercle circonscrit** au polygone. Le centre de ce cercle est appelé centre du polygone.

Exemple : Construction d'un pentagone à partir d'un cercle circonscrit

Propriété : soit un polygone régulier de centre O. Tous les angles au centre définis par deux rayons du cercle circonscrit joignant O à deux sommets consécutifs du polygone ont la même mesure. Si le polygone a n côtés, cette mesure, exprimée en degrés, est égale à $\frac{360°}{n}$.

Exemple **:** le pentagone a 5 côtés, la mesure de chaque angle au centre est donc : $\frac{360°}{5} = 72°$.

La figure 2 montre les étapes de la construction du pentagone.

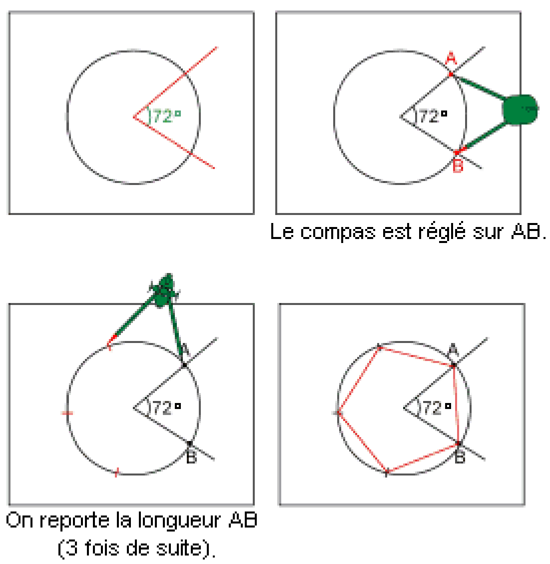


Figure 2

II- Construction :

Propriété : A, B et C étant trois sommets consécutifs d'un polygone de centre O, l'angle $\widehat{ABC}$ du polygone et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires. De plus, la demi-droite [BO] est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

***Exemple* 1 :** construisons un **octogone** régulier dont un côté [AB] est donné.

L'octogone a 8 côtés, la mesure de chaque angle au centre est donc : $\frac{360°}{8} = 45°$.

D'après la propriété ci-dessus, chaque angle de l'octogone mesure donc 180 – 45 = 135°.

On en déduit que chaque demi-angle au sommet mesure $\frac{135°}{2} = 67,5°$.

À partir du côté [AB], on va construire un triangle isocèle ABO tel que $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 67,5°$.

Le point O obtenu est le centre de l'octogone.

La figure 3 montre les étapes de la construction de l'octogone.

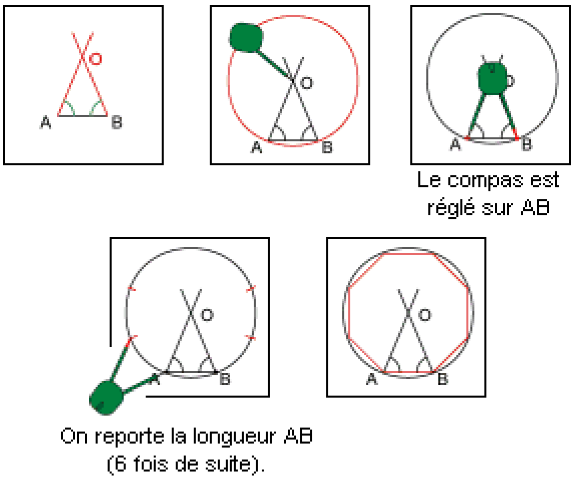


Figure 3

Remarque : on aurait aussi pu construire successivement les côtés de l'octogone sans tracer le cercle puisqu'on sait que chaque angle de l'octogone mesure 135°, mais cette construction est plus longue que la précédente.

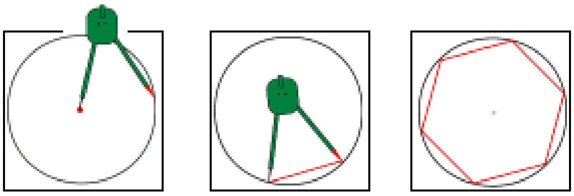
Exemple 2 : Construction d'un **hexagone** régulier au compas

L'hexagone ayant 6 côtés, chaque angle au centre mesure $\frac{360°}{6} = 60°$.

Chaque angle de l'hexagone mesure donc 180 – 60 = 120°.

On en déduit que chaque demi-angle au sommet mesure $\frac{120°}{2} = 60°$.

Donc chaque triangle formé par le centre et deux sommets consécutifs est **équilatéral**, ce qui justifie la construction d'un hexagone régulier à partir de son cercle circonscrit : on reporte 6 fois le rayon sur le cercle.



On a gardé le même écartement de compas.

On reporte la longueur donnée par le compas.

Figure 4