LA NUMERATION

I- Généralité :

Un **système de numération** est une **méthode** de représentation des **nombres** par des **symboles**. Le système de numération est dit de **position** si la position des symboles est significative (par exemple : dans le **système décimal** habituel, le premier chiffre à droite représente les **unités**, le second, les dizaines, etc.). Dans le cas contraire, il consiste en une juxtaposition de symboles.

Le système de position le plus communément utilisé est le **système décimal**. Toutefois, d'autres systèmes de position peuvent être utilisés à des fins spécifiques. Ainsi, le système binaire utilisé dans les **ordinateurs**, ou le système sexagésimal, utilisés pour les mesures de **temps** et d'**angles**.

- **Dans le système décimal**, on utilise dix symboles, ou chiffres : 0, 1, 2, ..., 9, qui représentent

les dix premiers entiers naturels. Par convention, l'entier qui suit 9 est représenté par le symbole 10, 10 x 10 par 100, etc.

Un nombre entier quelconque est alors symbolisé par un alignement de chiffres : $C_kC_k - 1 \ldots C_0$ représente le nombre

$C_k\ 10_k + c_k -1\ 10_k{}^{-1} + \ldots + c_0$.

- **Pour un nombre rationnel non négatif** représenté par la fraction irréductible a/b, on

effectue d'abord la division $a = nb + r_0$, où $0 \leq r_0 < b$, qui donne la partie entière n du nombre a/b. on effectue ensuite les divisions successives

$10r_0 = c_{-1}\ b + r_1\ 0 \leq r_1 < b$

$10r_1 = c_{-2}\ b + r_2\ 0 \leq r_2 < b$

qui donnent les chiffres de la partie décimale $c_{-1}\ c_{-2} \ldots$, appelés encore chiffres décimaux. Pour que le nombre de chiffres ainsi obtenus soit fini (il se compose de zéros à partir d'un certain rang), il faut et il suffit que b divise une puissance entière positive de 10 ; le nombre de chiffres est alors égal à l'**exposant** de la plus petite puissance de 10 qui soit un multiple de b. dans ce cas, on parle de développement décimal limité, et le nombre rationnel est appelé **nombre décimal**. On écrit a/b = n, $c_{-1}c_{-2} \ldots c_{-r}$. On a en particulier 1/10 = 0,1, 1/100 = 0,01, ..., donc

$a/b = n + c_{-1}/10 + c_{-2}/10_2 + \ldots + c_{-1}/10_r$.

Le développement est dit périodique s'il existe un entier p positif tel que, pour tout entier q supérieur à un certain entier $m \geq 1$, le q-ième chiffre décimal soit égal au (q + p)-ième. Le plus petit des entiers p possédant cette propriété est dit la longueur de la période et, si n désigne le plus petit des entiers m ci-dessus, la période est

$c_{-n-1} \dots c_{-n-p}$, tandis $c_{-1} \dots c_{-n}$ est dit la partie irrégulière du développement (la terminologie varie avec les auteurs). La partie $c_{-n-1}c_{-n-2} \dots$ du développement est alors dite régulière. On écrit :

$a/b = n, c_{-1}c_{-2} \dots c_{-n}c_{-n-1} \dots c_{-n-p}$.

Le nombre p est le plus petit des entiers **naturels k** tel que b divise 10^k-1. Pour tout nombre rationnel, le développement décimal est soit limité soit périodique. Réciproquement, tout développement décimal limité ou périodique représente un nombre rationnel. On appelle **fraction génératrice** du nombre rationnel la fraction définie par la somme :

$$\frac{c_{-1} \dots c_{-n}}{10^n} + \frac{c_{-n-1} \dots c_{-n-p}}{10^n (10^n - 1)}.$$

- **Dans le cas d'un nombre décimal**, on a uniquement le premier terme. Par exemple, la

fraction génératrice du nombre 0,142 857 est 142 857/999 999 = 1/7, celle du nombre 0,1245 est

(1/10) + (245/9 990) = 622/4 995.

Un nombre rationnel a un développement décimal illimité et non périodique. Le développement décimal d'un nombre réel a quelconque s'obtient de la façon suivante : si on désigne par [a] la partie entière de a (c'est-à-dire le plus grand entier non supérieur de a), on a :

$a = [a] + a_0, \qquad 0 \le a_0 < 1$

$10a_0 = [10a_0] + a_1, \qquad 0 \le a_1 < 1$

$10a_j = [10a_j] + a_j, \qquad 0 \le a_1 < 1.$

Si on pose alors $n = [a]$, $c_{-j} = [10a_{j-1}]$, on obtient le développement $n, c_{-1}c_{-2} \dots$ Si on exclut les développements périodiques de période 9, la correspondance entre nombres réels et développements décimaux est **bijective**.

Les considérations précédentes s'étendent au cas général de système de numération de base $b \ge 2$ quelconque (**système b-adique**). Un tel système est fondé sur un ensemble de b symboles (les **chiffres**) grâce auxquels on représente les entiers naturels de 0 à b - 1 ; un alignement de type

$(c_k c_{k-1} \dots c_0, c_{-1}, \dots c_{-h})_b$

où, pour i, c_i désigne un des b chiffres, représente le nombre

$c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + c_0 b^0 + (c_{-1}/b) + \dots + (c_{-h}/b^h)$.

Pour obtenir la représentation en base b du nombre a donné par sa représentation décimale, on effectue la division de la partie entière de a par b, puis la division de b du quotient et ainsi de suite.

Les restes successifs de la de la première suite d'opérations sont les chiffres de la partie entière de la représentation en base b pris dans l'ordre inverse, tandis que les produits successifs de la deuxième suite donnent les chiffres de la partie fractionnaire. Par exemple, la représentation en base 2 du nombre décimal 9,25 est donnée par :

92 |142 | 022 | 012 | 10|

0 | 25 x 2

0 | 50 x 2

1 | 00