

LES NORMES

I- Généralité :

Application définie sur un **espace vectoriel** E réel ou complexe, à valeurs réelles non négatives, notées généralement $\| \cdot \|$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0$; 2) $\| ax \| = |a| \| x \|$ pour tout scalaire a et tout vecteur x ; 3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Un espace E muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé ; il peut être muni d'une distance en posant $d(x, y) = \| x - y \|$. Dans un même espace, on peut définir des normes différentes : **par exemple**, dans l'espace arithmétique de dimension n , \mathbb{R}_n , on a les normes :

$$\| x \|_{\infty} = \max_i |x_i| \text{ (norme de la convergence uniforme)}$$

et, pour tout $r \geq 1$,

$$\| x \|_r = (\sum_{i=1}^n |x_i|^r)^{1/r}$$

(pour $r = 2$, on a la somme euclidienne).

Deux normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sur le même espace sont dites équivalentes s'il existe deux nombres positifs m et M tels que pour tout x et de E on ait :

$$m \| x \| \leq \| x \|' \leq M \| x \|.$$

Dans \mathbb{R}_n , toutes les normes sont équivalentes ; en particulier,

$$\| x \|_{\infty} \leq \| x \|_2 \leq \sqrt{n} \| x \|_{\infty}$$

$$(1/\sqrt{n}) \| x \|_2 \leq \| x \|_{\infty} \leq \| x \|_2.$$

II- Semi-normes :

Une semi-norme sur l'espace vectoriel E est une application définie sur E , à valeurs réelles non négatives, satisfaisant aux conditions 2) et 3) ci-dessus, mais pas forcément à 1). Si N désigne une semi-norme, les éléments de E vérifiant $N(x) = 0$ constituent un sous-espace vectoriel E_0 de E .

On peut associer à la semi-norme sur l'espace E une norme sur l'espace quotient E/E_0 .

III- Normes de matrices :

Dans l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$, une norme est dite **compatible** avec une norme donnée dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n si

- 1) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ pour toute matrice A et tout vecteur x .
- 2) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ pour toute matrice A et B .

A une même norme sur \mathbb{R}^n peuvent être associées différentes normes compatibles. Une norme compatible est dite **induite** par la norme sur \mathbb{R}^n si pour toute matrice A il existe un $x \neq 0$ tel que la première des deux inégalités précédentes soit une égalité.

Pour toute norme sur \mathbb{R}^n , il existe au moins une norme induite, à savoir

$$\|A\| = \max \|Ax\|$$

$$\|x\| = 1$$

Appelée norme naturelle ; par exemple : la norme $\|\cdot\|_\infty = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$

La norme euclidienne induit la norme naturelle

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(tAA)}$$

(ρ est la plus grande des valeurs propres de la matrice tAA). Toute norme naturelle majore le rayon spectral de A , $\rho(A) \leq \|A\|$.