LES NOMBRES

I- Généralité :

Concept mathématique primitif ayant pour origine l'opération intuitive du comptage d'où dérive la suite des **entiers naturels** : un, deux, …

Il est possible de donner une **caractérisation axiomatique** de ces entiers naturels, par exemple, au moyen des **axiomes** de **Peano** qui permettent de définir les **opérations** et la **structure algébrique** interne.

Partant de là, et par des extensions successives, on construit l'ensemble des **entiers relatifs**, celui des **nombres rationnels** et celui des **nombres réels**.

Si au contraire, on introduisait de façon axiomatique les nombres réels, on pourrait y distinguer les ensembles numériques mentionnés ci-dessous.

II- Nombres Réels et Sous-ensembles Remarquables :

A- L'ensemble des nombres réels est un corps cumulatif, totalement ordonné et complet. C'est

donc un ensemble R muni de deux opérations notées l'une additivement (+) et l'autre multiplicativement (. Ou x, ou même, quand il n'y a pas d'ambigüité, simple juxtaposition) qui jouissent des propriétés suivantes :

$a + b = b + a$ (commutativité),

$(a + b) + c = (b + c)$ (associativité),

$a + 0 = a$ (existence de l'élément neutre pour l'addition),

$a + (- a) = 0$ (existence de l'élément opposé),

$ab = ba$ (commutativité),

$(ab) c = a (bc)$ (associativité),

$a1 = a$ (existence de l'élément neutre pour la multiplication,

$aa^{-1} = a$ (existence de l'inverse pour a ‡ 0),

$a (b + c) = ab + ac$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

A partir de deux opérations introduites, on définit l'opération de soustraction :

$a – b = a + (- b)$,

et l'opération de division :

$a/b = ab^{-1}$ ($b \neq 0$). **R** est totalement ordonné ; autrement dit on définit une relation d'ordre, notée <, telle que pour tout couple de nombres (a, b), avec $a \neq b$ on ait soit $a < b$, soit $b < a$; la relation est transitive, c'est-à-dire $a < b$ et $b < c$ impliquent $a < c$. La relation d'ordre est compatible avec les opérations :

$a < b$ implique $a + c < b + c$,

$0 < a$ et $0 < b$ impliquent $0 < ab$.

L'ensemble est complet pour la relation d'ordre, ce qui signifie que tout **sous-ensemble** borné supérieurement (respi. Inférieurement) admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).

B- L'ensemble des entiers naturels N, caractérisés par des **axiomes** de **Peano**, est fermé pour

les opérations d'addition et de multiplication ; il admet un élément neutre pour la multiplication ; il est bien ordonné (tout ensemble non vide a un minimum) et archimédien (si a et b sont deux entiers naturels, il existe un entier naturel n tel que $b < na$).

C- L'ensemble des entiers relatifs Z jouit des mêmes propriétés que l'ensemble des entiers, à

cela près qu'il n'est pas bien ordonné. De plus, il est fermé pour la soustraction et, donc, contient la solution de toute équation de type $b + x = a$, où a et b sont deux entiers relatifs. Tout entier relatif peut être exprimé comme la différence de deux entiers naturels.

D- L'ensemble des nombres rationnels Q jouit de mêmes propriétés que l'ensemble des entiers

Relatifs. De plus, il contient l'inverse de tout nombre non nul, et donc la solution de toute équation de type $bx = a$ ($b \neq 0$) ; en outre, il est dense pour la relation < (autrement dit, pour tout couple (a, b) de nombres rationnels avec $a < b$, il existe un nombre rationnel c tel que $a < c < b$), mais il n'est pas complet. Tout nombre rationnel peut être représenté par une fraction de type a/b, a et b entiers, $b \neq 0$. Un nombre réel non rationnel est dit **irrationnel**.

On construit une extension du corps des réels : le corps des **complexes C**, défini comme l'ensemble des couples ordonnés de nombres réels (a', a''), muni d'une addition :

$(a', a'') + (b', b'') = (a'b') = (a' + b', a'' + b'')$,

et d'une multiplication :

$(a', a'')(b', b'') = (a' b'- a'' b'', a' b'' + a'' b')$, pour lesquelles les propriétés usuelles sont valables. L'élément neutre pour l'addition est (0, 0) et pour la multiplication (1, 0). L'opposé de (a', a'') est (- a ', - a''), l'inverse de (a', a'') ‡ (0, 0) est

(a'/(a'2 + a''2), - a''/(a'2 + a''2).

E- L'ensemble des nombres complexes de type (a', 0) est **isomorphe** à l'ensemble des nombres réels, et on identifie le nombre complexe (a', 0) au nombre réel a'. Le corps des nombres complexes n'est pas ordonné ; autrement dit, il n'existe aucune relation d'ordre, compatible avec les opérations, qui en fasse un corps ordonné.

Il résulte des définitions que tout nombre complexe z = (a', a'') peut être écrit

(a', 0) + (0, 1) (a'',0),

où (a', 0) et (a'', 0) sont identifiés aux nombres réels a' et a'', tandis que le nombre complexe, i = (0, 1), appelé unité imaginaire, jouit de la propriété que son carré est égal au nombre réel **-1**. On en déduit la représentation de **z** sous la forma algébrique z = a' + ia'' ; a' est appelé la partie réelle, notée **Re** (**z**), et a'' la partie imaginaire, notée **Im** (**z**), de z. un nombre complexe non nul dont la partie réelle est nulle est dit **imaginaire pur**. Deux nombres complexes dont les parties réelles sont égales et les parties imaginaires opposées sont dits **conjugués** : si z = a' + ia'', son conjugué a' – ia'' est noté en général **ẑ**.

Les nombres complexes admettent une représentation géométrique dans le plan (plan de **Argand-Gauss**) muni d'un système d'axes cartésiens orthogonaux : on associe au nombre x+ iy le point de coordonnées (x, y). Le nombre est appelé **affixe** du point correspondant. Les axes Ox et Oy sont appelés respectivement **axe réel** et **axe imaginaire**.

Un nombre, réel ou complexe, est dit **algébrique de degré n**, s'il est solution d'une équation algébrique de degré n ; il est dit **transcendant**, s'il n'existe aucune équation algébrique de ce type dont il soit racine.

Les nombres rationnels sont les nombres algébriques de degré 1, les nombres $\sqrt{\ }2$ et i sont des exemples de nombres algébriques de degré 2. Le nombre d'**Euler** et le nombre **π** sont deux exemples importants de nombres transcendants. On a les relations d'inclusion ensemblistes :

N C Z Q C R C C.

III- Nombre cardinal :

Classes d'équivalence d'**ensembles équipotents** (deux ensembles **A** et **B** sont dits équipotents s'il existe une bijection de **A** sur **B**) notée card (**A**).

Cette définition permet d'introduire les entiers naturels comme nombres cardinaux d'ensembles finis :

0 = card (0), 1 = (0), 2 = card (0, 1), …

Le cardinal d'un ensemble infini, c'est-à-dire d'un ensemble équipotent à un de ses sous-ensembles propres, est dit **transfini**. Pour les nombres cardinaux, il est possible d'introduire des opérations de la façon suivante : si **A** et **B** désignent deux ensembles disjoints, a =card (**A**) et b = card (**B**), on pose :

a + b = card (A U B), ab = card (A X B)

(A X B désigne l'ensemble produit); **a**b est le nombre cardinal de l'ensemble des applications de B dans A. on peut aussi définir une relation d'ordre partiel a ≤ b si, et seulement si, il existe une bijection de A sur une partie de B.

Le théorème **Cantor** affirme que tout nombre cardinal admet un majorant strict : quel que soit A, le cardinal de A est plus petit que le cardinal de l'ensemble des parties de A ; on a card (g' (A) = 2 card (A).

Le cardinal de l'ensemble des entiers naturels est désigné par %0 (alef zéro). C'est aussi le cardinal de l'ensemble des entiers relatifs, de l'ensemble des rationnels, de l'ensemble des nombres réels algébriques, ensembles qui sont équipotents. Tout ensemble ayant %0 pour cardinal est dit **dénombrable**. L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable : si on désigne par % son nombre cardinal, on montre que % = 2%0. L'hypothèse du continu consiste à supposer que, pour tout nombre cardinal **transfini** a, le nombre cardinal immédiatement supérieur est 2a.

IV- Nombre ordinal :

Type d'ordre d'un ensemble bien ordonné. Par abus de langage, on désigne par **n** l'ordinal Ord (**0**, **1**,**… n**). Deux ensembles ordinaux finis ayant le même nombre cardinal n ont le même nombre ordinal, tandis qu'à un nombre cardinal transfini peuvent être associés plusieurs nombres ordinaux (il suffit de considérer l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers ordonnés selon le schéma :

2 < 4 < … < 1 < 3 < …).

L'ensemble des nombres ordinaux est ordonné par la relation suivante : étant donné deux ensembles **A** et **B**, ord (**A**) est dit précéder ord (**B**) si **A** a le même type d'ordre qu'un sous-ensemble de **B** muni de l'ord induit par **B**.