LES MATHEMATIQUES (COURS 8 EME ANNEE)

I- Puissance d’un nombre naturel :

Soit a un nombre non nul et n un entier naturel non nul. L'aire d'un carré de côté a est a^2 (on lit « a au carré », ou « *a* puissance 2 », ou « *a* exposant 2 »).

De même, le volume d'un cube d'arête a est a^3 (on lit « *a* au cube » ou « *a* puissance 3 » ou « *a* exposant 3 »)

.

Mais quel sens ont donc d'autres écritures telles que 7^5, $(-2)^7$ ou 5^{-3} ?

1- Définition :

Si $n \geq 2$, alors a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{a \text{ est écrit } n \text{ fois}}$.

Si $n = 1$, alors $a^1 = a$.

De plus, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Enfin, par convention, si $a \neq 0$ on pose $a^0 = 1$. Donc « 0^0 » n'est pas défini.

Vocabulaire :

— a^n et a^{-n} s'appellent des **puissances** de a.

— n (ou $-n$) s'appelle l'**exposant**.

— Pour a^n, on lit « a à la puissance n » ou « *a* exposant *n* ».

— 10^7 se lit « 10 à la puissance 7 », mais $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ se lit « 3 sur 7, le tout à la puissance 5 ».

Exemples :

$3^5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{3 est écrit 5 fois}} = 243$.

$(-2)^7 = \underbrace{(2-) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}_{\text{-2 est écrit 7 fois}} = 128$.

$5^{-3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{75} = 0{,}008$.

Remarque:

Pour calculer, avec une calculatrice, une puissance d'un nombre, on utilise la touche **y^x** (ou **x^y** ou **∧** ou **↑**). Ainsi, pour calculer $2{,}3^4$, on tape la séquence : 2, 3 y^x 4 =, ce qui donne : 27,984 1.

2- Propriétés :

a et b étant des nombres relatifs non nuls, n et p étant des entiers relatifs, on a :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$; $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$;

$a^n \times b^n = (ab)^n$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

$(a^n)^p = a^{n\,p}$.

Examples:

$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11} = 177\,147$

$\dfrac{-5^3}{-5^5} = (-5)^{3-5} = (-5)^{-2} = \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$.

$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

$(4^2)^{-3} = 4^{2 \times (-3)} = 4^{-6} = \dfrac{1}{4^6} = \dfrac{1}{4\,096} = 0{,}000\,244$.

EXERCICE :

Écrire un nombre sous forme d'une puissance

Considérons le nombre A égal à $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Il y a 6 facteurs tous égaux à 3, donc $A = 3^6$.

De même, si $B = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$, alors $B = \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{7^5} = 7^{-5}$.

Enfin, si $C = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7$, alors :

$C = (-3)^4 \times 0,7^4$

$C = ((-3) \times 0,7)^4$

$C = (-2,1)^4$

Remarque : dans l'écriture de C, il y a quatre facteurs négatifs et par conséquent, le résultat est positif. On a donc également : $C = 2,1^4$.

Cette remarque se généralise. Soit a un nombre strictement négatif et n un entier relatif :

— si n est pair alors a^n est positif ;

— si n est impair alors a^n est négatif.

Utiliser des puissances de 10

Voici une conséquence de la définition de la puissance d'un nombre non nul.

Soit n un entier strictement positif.

10^n s'écrit : 1 suivi de n chiffres 0.

10^{-n} s'écrit : 0,.....1 avec n chiffres 0 au total (dont $n - 1$ zéros après la virgule).

Exemples :

$10^3 = 1\,000$ (trois zéros) ; $10^6 = 1\,000\,000$ (six zéros).

$10^{-2} = 0{,}01$ (deux zéros) ; $10^{-6} = 0{,}000\,001$ (six zéros).

Bien sûr, $10^0 = 1$.

Ceci permet d'écrire les nombres décimaux en écriture scientifique.

Exemples :

$1\,500\,000 = 1{,}5 \times 1\,000\,000 = 1{,}5 \times 10^6$

$0{,}000\,000\,054\,7 = 5{,}47 \times 0{,}000\,000\,01 = 5{,}47 \times 10^{-8}$

3- Calcul :

On retrouve des puissances dans de très nombreuses formules de mathématiques ou de physique.

Par exemple, le volume d'une boule est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$, où R désigne le rayon.

Comment utiliser la définition et les propriétés des puissances pour les calculer ?

- Utiliser la définition des puissances :

On veut calculer les nombres A, B, C, D, E, F, G, H et I suivants :

$A = 1{,}1^3 = 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}331$.

$B = (-0{,}2)^5 = (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) = -0{,}000\,32$, car le nombre - 0,2 est négatif et l'exposant, 5, est impair.

$C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$. On peut aussi écrire : $C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

$D = 1\,789^0 = 1$, car tout nombre non nul élevé à la puissance 0 donne 1 (mais $0^{1\,789} = 0$).

$E = (-2\,001)^1 = -2001$.

$F = (-1)^{2\,001} = -1$, car il y a un nombre impair de facteurs tous égaux à -1.

$G = (-1)^{3\,000} = 1$, car il y a un nombre pair de facteurs tous égaux à -1.

$H = -2^8 = -128$. En effet, l'écriture -2^8 est équivalente à l'écriture $-(2^8)$.

- **Appliquer les propriétés des puissances :**

Dans ce paragraphe, a et b désignent des nombres non nuls, n et p des entiers relatifs.

On veut écrire sous la forme d'une puissance les nombres A, B, C, D et E suivants :

$A = (-7)^3 \times 5^3 = (-7 \times 5)^3 = (-35)^3$

On a utilisé la propriété : $a^n \times b^n = (ab)^n$.

$B = (-0,7)^7 \times (-0,7)^4 = (-0,7)^{7+4} = (-0,7)^{11}$

On a utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

$C = 4^3 \times 4^{-9} = 4^{3-9} = 4^{-6}$

On a ici aussi utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$. En effet, $3 + (-9) = 3 - 9 = -6$.

$D = (2{,}3^5)^3 = 2{,}3^{5 \times 3} = 2{,}3^{15}$

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$D = (2{,}3^5)^3 = 2{,}3^5 \text{ x } 3 = 2{,}3^{15}$.

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$$E = \frac{4^2}{4^7} = 4^{2-7} = 4^{-5}.$$

On a utilisé la propriété : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

***Remarque* :** attention, il n'existe pas de formules concernant la somme des puissances !

Ainsi : $G = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ (alors que $3 + 5 = 8$ et $8^2 = 64$), car les puissances ont priorité sur les additions.

Les calculs de puissances ou de racines carrées peuvent être fastidieux si on ne dispose pas d'une calculatrice.

- **Comment les faire avec une calculatrice ?**

- **Utilisation de la machine :**

La plupart des calculatrices possèdent une touche « carré » : $\mathbf{x^2}$.

Exemple : pour calculer l'aire d'un carré de côté 3,7 m, il suffit de saisir la séquence : 3, 7 x^2.

L'affichage indique : 13,69. L'aire de ce carré est donc 13,69 m^2.

Remarque : sur certaines calculatrices, il faut appuyer sur la touche **EXE** pour que le calcul soit exécuté.

- **Calculer une puissance :**

Pour calculer un cube (si la calculatrice ne possède pas la touche « cube » : $\mathbf{x^3}$) ou une puissance quelconque, on peut utiliser la touche « puissance » dont le symbole sur le clavier de la calculatrice

est : $\mathbf{Y^x}$ ou $\mathbf{X^Y}$ ou **^** ou ↑.

Exemple 1 : on veut calculer le nombre $A = 57^3$.

On tape la séquence : 5 7 y^x 3 = (ou : 5 7 y^x 3 EXE).

L'affichage indique : 185193

Remarque : suivant les modèles, c'est la touche **=** ou la touche **EXE** qui donne l'ordre d'effectuer les calculs.

Exemple 2 : on veut calculer le nombre $B = (-2,4)^4$.

On tape la séquence : 2 , 4 **+/-** Y^x 4 **=**

L'affichage indique : **33,1776**

On pouvait prévoir que le résultat serait positif, puisque l'exposant est pair, et ne pas utiliser la touche **+/-**.

Exemple 3 : on veut calculer le nombre $C = 0,4^{-7}$.

On tape la séquence : 0, 4 Y^x 7 **+/- =** L'affichage indique : **97,65625**

Exemple 4 : on veut calculer le nombre $\boldsymbol{D = 17^{23}}$.On tape la séquence : 1 7 **y^x** 2 3 **=**

L'affichage indique : 1,99675689 ^{28}

Cet affichage signifie : $1{,}996\ 756\ 89 \times 10^{28}$.

Remarque : lorsque le nombre est trop grand par rapport à l'écran d'affichage, la calculatrice passe automatiquement en mode scientifique.

On constate que certaines décimales sont alors perdues (sauf sur des calculatrices très performantes travaillant en mode exact).

II- Droites parallèles et perpendiculaires :

Pour tracer des droites parallèles et perpendiculaires sur une feuille de papier, on utilise un outil nommé **équerre** ; il existe deux sortes d'équerre. La première sorte a une forme de triangle isocèle, ce qui veut dire que deux de ses côtés, ceux qui forment un angle droit, sont de même longueur.

Ces deux côtés sont appelés les **cathètes** du triangle. La deuxième sorte d'équerre est un simple triangle rectangle : ses trois côtés ont tous des longueurs différentes, et deux de ses côtés (les cathètes) forment aussi un angle droit. Les équerres sont généralement faites de plastique transparent.

- Pour tracer une parallèle à une droite, on suit les étapes suivantes :

1- on aligne l'hypoténuse (côté le plus long, opposé à l'angle droit) de l'équerre isocèle avec la droite ;

2- on pose une règle (ou une autre équerre) le long d'une des cathètes de la première équerre ;

3-on fait glisser l'équerre isocèle le long de la règle (ou de l'autre équerre) jusqu'à arriver à la

position où l'on veut tracer la droite parallèle.

- Pour tracer maintenant des droites perpendiculaires à celles d'avant, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. sans déplacer la règle (ou l'équerre de gauche), on enlève l'équerre isocèle ;

2. on tourne l'équerre isocèle de manière à ce que ce soit l'autre cathète qui soit posée là où était la première au début, le long de la règle ;

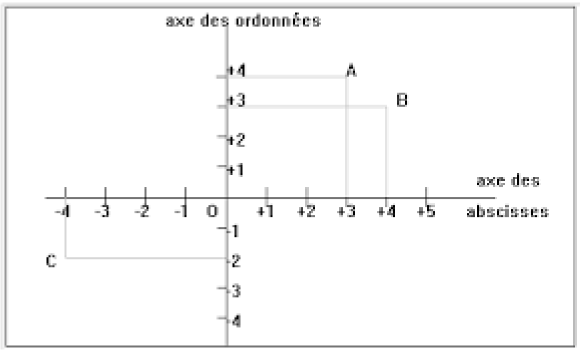
3. on glisse l'équerre isocèle le long de la règle (ou de l'autre équerre) jusqu'à ce que son hypoténuse arrive à l'endroit où l'on veut tracer la droite perpendiculaire.

Pour se représenter une droite, on peut imaginer une corde tendue sur un mur ou un rayon de lumière. Une droite est une **ligne continue** dans une direction fixée, sans sauts ou interruptions, **sans début ni fin**, **formée par la succession d'une infinité de points alignés**.

1- Abscisse et ordonnée :

Les **nombres relatifs** permettent de graduer complètement une **droite** (dans les deux sens, de part et d'autre du zéro).

Comment place-t-on sur une droite graduée un point d'abscisse donnée ?



a- Définitions :

Un **axe** est une droite sur laquelle **un sens positif et un sens négatif** ont été définis et sur laquelle une **graduation régulière** a été tracée.

En général, le sens positif est le sens de parcours de la gauche vers la droite ou bien le sens de parcours du bas vers le haut (ces deux sens sont symbolisés par une flèche à l'extrémité de la droite).

Les traits de la graduation peuvent être espacés d'un écart quelconque, mais celui-ci doit être constant.

b- Abscisse :

L'**abscisse** (mot féminin) d'un point sur un axe est le nombre qui lui est associé ; ce nombre indique :

le **nombre d'unités nécessaires** pour aller de l'origine au point considéré ; le sens dans lequel il faut se déplacer pour y aller.

Soit un axe sur lequel la graduation fait apparaître l'origine. Si l'on veut placer le point A d'abscisse - 3, il suffit de compter trois graduations vers la gauche en partant de 0 puisque, dans le cas présent, l'écart entre chaque graduation est égal à 1 (les traits de graduation correspondant aux nombres 0 et 1 permettent de l'affirmer).

Si l'on veut placer le point B d'abscisse 2,7, la tâche est plus complexe puisqu'il faut partager le segment entre 2 et 3 en dixièmes.

Remarques **:**

Il est impossible placer le point C d'abscisse 3,64 avec exactitude, car on ne peut pas percevoir les centièmes sur l'axe donné.

On peut simplement donner sa localisation approximative : entre les points d'abscisses 3,6 et 3,7 ;

Il est impossible de placer le point d'abscisse - 6, car l'axe est trop court.

L'origine de l'axe n'est pas toujours visible sur la figure ; il est cependant parfois possible de placer un point d'abscisse donnée.

c- Ordonnée :

Un repère du plan est constitué de deux axes ayant la même origine, généralement **perpendiculaires**. L'axe « **horizontal** » est l'axe des abscisses et l'axe « **vertical** » est l'axe des **ordonnées**.

Les coordonnées d'un point sont deux nombres classés dans un ordre précis :

- le premier nombre s'appelle l'abscisse du point ;

- le deuxième nombre s'appelle l'ordonnée du point.

Comment placer un point dont on connaît les coordonnées dans un plan muni d'un repère ?

Exemple 1 :

On veut placer le point A de coordonnées 3 et 2.

L'abscisse de A est égale à 3 et son ordonnée est égale à 3.

Première étape : on repère 3 sur l'axe des abscisses et 2 sur l'axe des ordonnées.

Deuxième étape : on trace des droites parallèles aux axes passant par les traits de graduation correspondant à 3 et à 2. À l'intersection de ces droites se trouve le point A.

Exemple 2 :

On veut placer le point B de coordonnées -4 et -3.

L'abscisse de B est égale à -4 et son ordonnée est égale à -3.

Remarques :

Si un point a une abscisse égale à 0, alors ce point est sur l'axe des ordonnées.

Si un point a une ordonnée égale à 0, alors ce point est sur l'axe des abscisses.

On peut aussi placer des points dont les coordonnées ne sont pas des entiers.

III- Diviseurs multiples :

On appelle **division euclidienne**, du nom du mathématicien grec **Euclide**, la division de deux nombres entiers naturels dont le quotient et donc le reste sont aussi des entiers.

Qu'est-ce qu'un diviseur dans le cadre de la division euclidienne ?

1- Définitions :

Soient a et b deux nombres entiers.

On dit que b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre entier q tel que $a = b \times q$.
On dit aussi que a est un **multiple** de b, ou que a est **divisible** par b.

Remarques :

Dire que b est un diviseur de a revient à dire que la division euclidienne (donc à quotient entier) de a par b a pour reste 0.

Dans ce cas, on peut donc écrire $a = b \times q$, où q est le quotient de a par b ; certaines calculatrices ont une touche permettant d'effectuer les divisions euclidiennes ; on peut alors lire le quotient et le reste de la division à l'écran.

Exemple : 13 et 7 sont-ils des diviseurs de 221 ?

On effectue les divisions euclidiennes de 221 par 13, puis de 221 par 7 :

$221 = 13 \times 17$, donc 13 est un diviseur de 221.

$221 = 31 \times 7 + 4$, donc 7 n'est pas un diviseur de 221.

2- Critères de divisibilité :

Il n'est pas toujours nécessaire de faire une division pour savoir si un nombre entier est divisible par un autre ; rappelons en effet les règles suivantes :

Un entier divisible par 2 est un entier dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un entier divisible par 3 est un entier dont la somme des chiffres est divisible par 3.

Un entier divisible par 5 est un entier dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Un entier divisible par 9 est un entier dont la somme des chiffres est divisible par 9.
Un entier divisible par 10 est un entier dont le chiffre des unités est 0.
Exemple : d'après ces critères, on peut dire que 975 est divisible par 3 et 5, mais ne l'est ni par 2, ni par 9 ni par 10.

3- Règles :

Si on considère un nombre entier a différent de 0 et de 1, ce nombre a au moins deux diviseurs : **1 et lui-même.**

En effet on a toujours $a = a \times 1$.

Le nombre **1** n'a qu'un diviseur : lui-même.

Le nombre **0** admet tous les nombres entiers comme diviseurs.

Les diviseurs d'un nombre entier non nul peuvent être **associés** : par exemple, on dira que 8 et 9 sont deux diviseurs associés de 72, car 72 est divisible par 8 et par 9, et $72 = 8 \times 9$.

4- Méthode :

Expliquons la méthode à l'aide d'un exemple : recherchons tous les diviseurs de 72. La manière de procéder est la suivante : on divise 72 par tous les nombres entiers successifs : 1, 2, 3, etc.

Lorsque le reste est nul, on écrit l'égalité correspondante et les diviseurs associés obtenus.

Le processus s'arrête car l'égalité suivante, $72 = 9 \times 8$, redonne les diviseurs 8 et 9 déjà obtenus.

Les diviseurs de 72 sont donc : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.

Exemple :

On cherche les diviseurs communs à 72 et 54. Pour cela, on cherche les diviseurs de chacun de ces nombres en utilisant la méthode du paragraphe précédente, puis on extrait les nombres qui figurent dans les deux listes à la fois :

Les diviseurs de 72 sont : **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **8**, **9**, **12**, **18**, **24**, **36** et **72**.

Les diviseurs de 54 sont : **1**, **2**, **3**, **6**, **9**, **18** et **27**.

Les diviseurs communs à 72 et 54 sont donc : **1**, **2**, **3**, **6**, **9** et **18**.

5- Définition du PGCD :

Le **plus grand diviseur commun** à deux nombres entiers est appelé en abrégé le **PGCD** de ces deux entiers.

Exemple : le PGCD de 72 et 54 est 18 (d'après l'exemple du paragraphe précédent). On note : PGCD (72, 54) = 18.
En reprenant la liste des diviseurs communs à 72 et 54 : 1, 2, 3, 6, 9 et 18, on constate que ce sont tous les diviseurs de 18.
Propriété : les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD. Si on connaît le PGCD de deux entiers, il suffit donc de trouver tous ses diviseurs pour avoir les diviseurs communs à ces deux entiers.

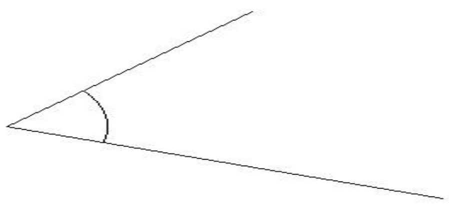
IV- Angle :

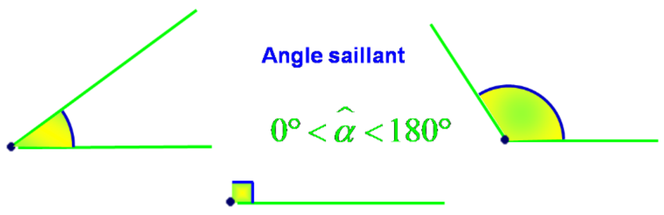
A- Définition :

Un **angle** est la **figure** formée par deux **demi-droites**, deux **segments de droite** ou une **demi-droite** et un segment de droite issus d'un même point qui est le **sommet** de l'angle.

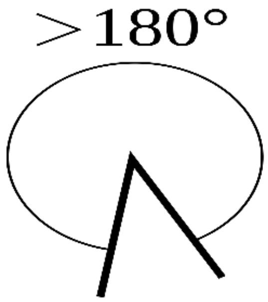
Pour désigner un angle formé par deux demi-droites AB et AC, on dit BÂC, on dit angle BÂC en plaçant la lettre du sommet au milieu ou plus simplement l'angle A. on écrit BÂC ou Â.

1- Angle saillant :



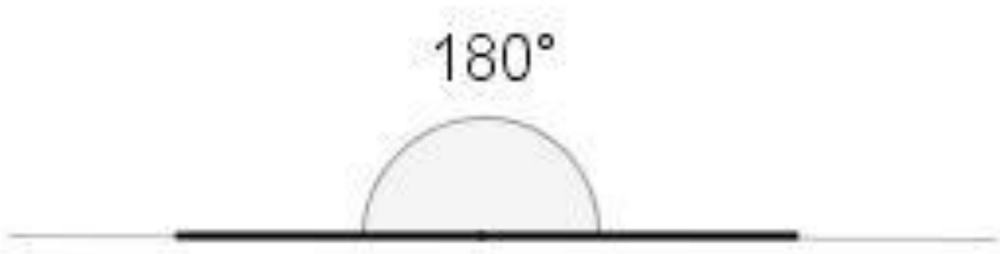


2- Angle rentrant :



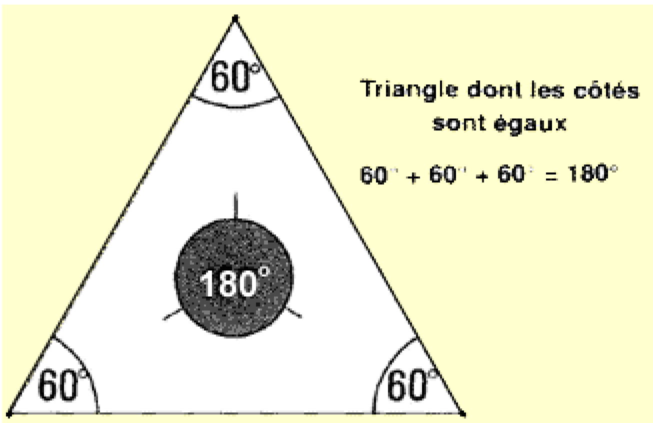
3- Angle plat :

On appelle **angle plat**, un angle dont les côtés appartiennent à une même droite. C'est un angle de 180°**.**



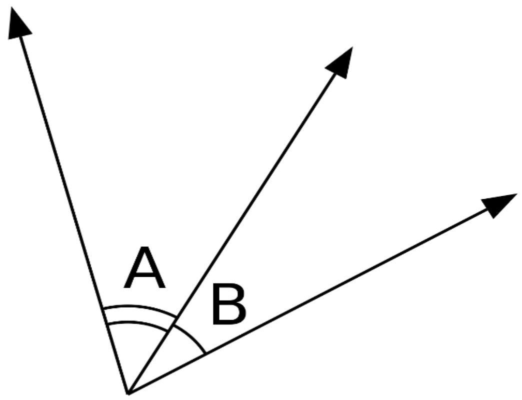
4- Angles égaux :

Ce sont deux angles superposables.

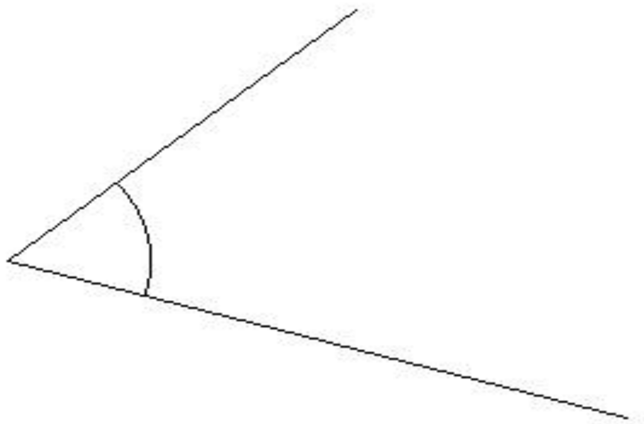


5- Angles adjacents :

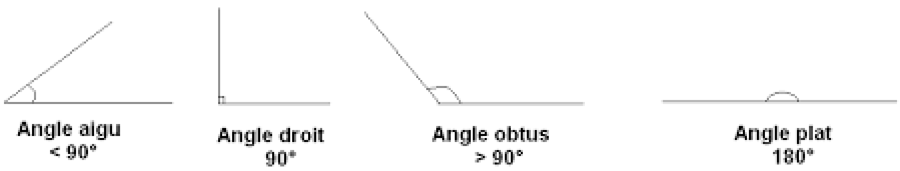
Deux angles sont **adjacents** lorsqu'ils ont le même sommet, un côté commun et qu'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.



6- Angle droit : C’est la **motrice** d’un angle plat. C’est aussi un angle de 90°.



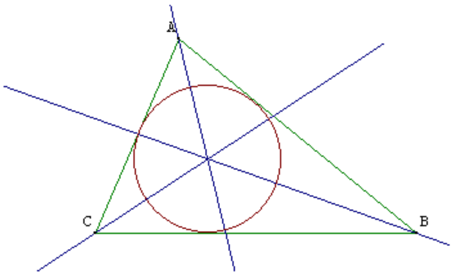
7- Angle aigu et obtus :



- On appelle **angle aigu**, un angle inférieur à l’**angle droit**.

- On appelle **angle obtus**, un angle supérieur à l’angle droit.

8- **Bissectrice d'un angle :** C'est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles opposés.



Les 3 bissectrices d'un triangle, et leur intersection, le centre du cercle inscrit.

B- **Unités d'angles :** Comme unités d'angles, on utilise :

- **Le degré :** (°) C'est le **sous multiple** : **minute** (**'**) et la **seconde** (**''**).

1° = 60'. 1' = 60''.

- **Le grade :** (gr) et ses sous multiples décimaux (**décigrade**, **centigrade**, etc.).

1° = 100 gr

1 gr= 10 dgr

- **Le radian :** 2 π rad = 360° = 400 gr

Remarque :

1- **Les angles complémentaires :**

Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leur mesure est un angle droit. Exemple : (50° et 40°) ; (30° et 60°).

2- **Les angles supplémentaires :**

Deux angles sont dits **supplémentaires** si la somme de leur mesure vaut 180°. Exemple : (120° et 60°) ; (110° et 70°) ; (150° et 30°).

V- Nombres décimaux :

Les nombres décimaux s'écrivent de différentes façons ; par exemple 0,25 s'écrit $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$.

Dans l'écriture décimale d'un nombre décimal, la virgule sépare la partie entière de la partie décimale. Les nombres entiers sont des nombres décimaux dont la partie décimale est égale à 0 ; ils peuvent s'écrire sans virgule.

Le premier ouvrage européen connu traitant des notations des nombres décimaux paraît en 1582 sous le titre « ***De Thiende*** » *(le Dixième)* ; son auteur, **Simon Stevin**, est un mathématicien flamand.

La notation qu'il propose, relativement complexe, utilise un symbole particulier pour désigner les **unités**, un autre pour les **dixièmes**, un autre encore pour les **centièmes** et ainsi de suite.

En 1592, le mathématicien et horloger suisse **Jost Bürgi** simplifie l'écriture de **Stevin** en utilisant simplement le signe **°** pour signaler le chiffre des unités.

Exemple **:** le nombre 54,306 s'écrit 54°306.

L'Italien **Magini** perfectionnera la notation introduite par **Bürgi** en remplaçant le petit rond (**°**) par un point placé entre le chiffre des unités et celui des dixièmes. C'est ainsi que naît la notation anglo-saxonne des nombres décimaux.

Exemple **:** le nombre 54,306 s'écrit 54.306.

En 1608, le Néerlandais **Willibrord Snellius** imagine la notation à **virgule** que nous utilisons en **France** de nos jours.

1- Lecture :

Pour lire correctement des nombres décimaux, il suffit de **repérer la place de chacun des chiffres** qui composent son écriture usuelle.

Exemples :

Le nombre 504,36 se lit 504 unités et 36 centièmes ou bien 504 virgule 36 ;
Le nombre 47,895 1 se lit 47 unités et 8 951 dix-millièmes ou bien 47 virgule 8 951.

2- Ecriture :

La **partie entière** d'un nombre décimal s'écrit en groupant les chiffres par trois en partant de la droite, juste avant la virgule s'il y en a une, et en allant vers la gauche.

Exemples :

« Quatre-vingt-six millions sept cent dix mille treize » s'écrit 86 710 013 ;
« Huit mille trois unités et soixante-neuf centièmes » s'écrit 8 003,69.

La **partie décimale** d'un nombre décimal s'écrit en groupant les chiffres par trois en commençant juste après la virgule et en allant vers la droite.

Exemples :

« Zéro unité et trois cent douze millièmes » s'écrit 0,312.

« Sept mille unités et vingt-cinq cent millièmes » s'écrit 7 000,000 25.

3- Utilisation des fractions :

Il est possible d'utiliser des **fractions décimales pour écrire des nombres décimaux.**

Exemple :

6,789 s'écrit aussi $6 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000}$, ou bien $\frac{6\,789}{1\,000}$, ou encore $6 + \frac{789}{1\,000}$.

4- Comparaison :

Comparer deux nombres, c'est trouver le plus grand des deux. Une fois que l'on sait comparer deux nombres, peut-on facilement ranger plusieurs nombres selon un ordre **croissant** ou **décroissant ?**

On voit facilement que $34,97 < 35,2$ car $34 < 35$.

Si deux nombres décimaux **n'ont pas la même partie entière,** alors le plus petit est celui qui a la plus petite partie entière.

Dans le cas où deux nombres décimaux ont des **parties entières égales**, on examine chiffre par chiffre leurs parties décimales, en commençant par la décimale placée juste à droite de la virgule et en ajoutant au besoin des zéros.

Exemple 1 :

56,24 > 56,239. **Pourquoi ?**

Les deux parties entières sont égales et le premier chiffre de chaque partie décimale est 2, mais on observe que 4 > 3, ce qui permet de conclure.

Exemple 2 :

3,5 < 3,54. **Pourquoi ?**

On peut écrire que 3,5 = 3,50 et 0 < 4, ce qui permet de conclure.

Remarque :

On conclut dès qu'on a trouvé deux chiffres distincts situés à la même place dans la partie décimale de l'un et de l'autre.

Ainsi 6,4 > 6,398 (car 4 > 3). Donc attention : la longueur de la partie décimale n'est pas un critère pertinent pour comparer deux décimaux !

Pour comparer deux nombres décimaux écrits sous forme fractionnaire, il suffit de les écrire sous forme décimale.

Exemple : $34 + \frac{2}{10} > 34 + \frac{173}{1\,000}$. **Pourquoi ?**

On peut écrire que $34 + \frac{2}{10} = 34{,}2$ et $34 + \frac{173}{1\,000} = 34{,}173$.

On a bien alors 34,2 > 34,173, ce qui permet de conclure.

5- Rangement :

Ranger des nombres dans l'ordre croissant, c'est les écrire du plus petit au plus grand.
Ranger des nombres dans l'ordre décroissant, c'est les écrire du plus grand au plus petit.

***Exemple* 3 :**

Pour ranger 5,6 ; 4, 33 et 4,385 dans l'ordre croissant, on compare ces nombres deux à deux ; on remarque alors que 4,33 < 4,385 et que 4,385 < 5,6. On peut donc écrire : 4,33 < 4,385 < 5,6.

Exemple 4 **:**

Pour ranger 41,667 ; 41,3 et 50,1 dans l'ordre décroissant, on compare ces nombres deux à deux ; on remarque alors que $50{,}1 > 41{,}667$ et que $41{,}667 > 41{,}3$.

On peut donc écrire : $50{,}1 > 41{,}667 > 41{,}3$.

6- Multiplication et division :

Pour multiplier ou diviser un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000, il est inutile de poser la multiplication ou la division.

Mais alors, quelle méthode utiliser ?

a- Multiplication :

On sait que :

— 54 **dizaines** sont égales à 54**0** unités ;
— 54 **centaines** sont égales à 5 4**00** unités ;
— 54 **milliers** sont égaux à 54 **000** unités.

On peut donc écrire :

$54 \times 1\mathbf{0} = 10 \times 54 = 54\mathbf{0}$

$54 \times 1\mathbf{00} = 100 \times 54 = 5\,4\mathbf{00}$

$54 \times 1\,\mathbf{000} = 1\,000 \times 54 = 54\,\mathbf{000}$

Règle générale :

Pour écrire le résultat de la multiplication d'un nombre entier par 10, 100 ou 1 000, il suffit d'ajouter respectivement un, deux ou trois zéros à la droite de l'écriture du nombre.

b- Division :

On sait que :

- 54 **dixièmes** sont égaux à
- 54 **centièmes** sont égaux à
- 54 **millièmes** sont égaux à

On peut donc écrire :

54 ÷ 1**0** = 5,**4**
54 ÷ 1**00** = 0,**54**

54 ÷ 1 **000** = 0,**054**

Sachant que 54 = 54,0, on peut considérer que les écritures 5,4 ; 0,54 et 0, 054 résultent du déplacement de la virgule dans 54,0 d'un, deux ou trois rangs **vers la gauche**.

***Règle générale* :**

Pour écrire le résultat de la division d'un nombre entier par 10, 100 ou 1 000, il suffit de considérer une virgule à droite du chiffre des unités et de la déplacer respectivement d'un, deux ou trois rangs vers la gauche.

On peut donc en déduire que :

4,5 × 10 = 10× 4,5 = 45

4,5 × 100 = 100× 4,5 = 450

4,5 × 1 000 = 1 000× 4,5 = 4 500

***Règle générale* :**

Pour écrire le résultat de la multiplication d'un nombre décimal non entier par 10, 100 ou 1 000, il suffit de déplacer la virgule respectivement d'un, deux ou trois rangs **vers la droite**.

7- Addition et soustraction :

a- Addition :

Lorsque l'on additionne ou soustrait des nombres décimaux, on obtient bien sûr un nombre décimal.

Quelle technique appliquer quand on ne dispose pas de calculatrice ?

Il suffit de **placer dans une même colonne les chiffres de même nature.**
Pour calculer par exemple 3,89 + 12,03, il suffit de disposer les calculs ainsi :

		3	,	8	9
+	1	2	,	0	3

On aligne correctement les chiffres des parties entières ; puis, à droite de la virgule, on place les chiffres des dixièmes les uns sous les autres, de même pour les chiffres des centièmes, et ainsi de suite pour les autres décimales.
Il suffit alors d'effectuer l'addition selon la technique usuelle.

				1	
		3	,	8	9
+	1	2	,	0	3
=	1	5	,	9	3

b- Soustraction :

Pour la soustraction, on utilise la même méthode.

	8	9	,	0	5
-	2	7	,	6	1
		1			
	6	1	1	4	4

- Cas où les écritures n'ont pas le même nombre de décimales :

En ajoutant des zéros à droite de la partie décimale, il est toujours possible de faire en sorte que des nombres décimaux soient écrits avec le même nombre de décimales.

Ainsi, 59,8 - 2,934 = 59,800 - 2,934. En disposant les chiffres de la même manière que dans le paragraphe 1, on trouve le résultat suivant :

	5	9	,	8	0	0
-		2	,	9	3	4
		1		1	1	
=	5	6	,	8	6	6

- **Cas où les écritures sont fractionnaires :**

Il est toujours possible de **se ramener au cas des écritures décimales** en convertissant les écritures fractionnaires en écritures décimales.

Par exemple, pour effectuer la somme $31 + \frac{7}{1\,000} + 6 + \frac{1}{10} + \frac{9}{1\,000}$,

il suffit de l'écrire : 31,007 + 6,109.

On trouve alors, en utilisant la méthode du paragraphe précédent, le résultat 37,116 que l'on peut réécrire ainsi :

$$37 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{6}{1\,000}$$

Remarque :

Il est parfois plus rapide de ne pas convertir les écritures fractionnaires en écritures décimales.

Par exemple : $\frac{23}{100} - \frac{11}{100} = \frac{23 - 11}{100} = \frac{12}{100}$.

VI- Le Cercle :

1- Définition :

Ensemble des **points** du **plan** situés à une distance donnée r (**rayon**) d'un point donné (**centre**).

L'équation cartésienne des cercles ayant pour centre le point (a, b) et pour rayon r est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

C'est une conique particulière qui n'a qu'un foyer coïncidant avec le centre, et où tout **diamètre** est un **axe**.

La longueur du cercle est donnée par $2\pi\, r$.

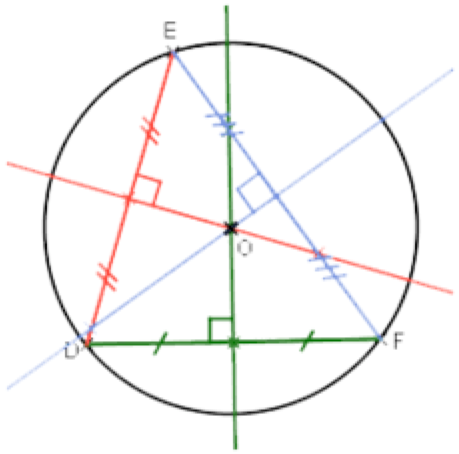
2- Le Cercle circonscrit :

a- Définitions :

Le **cercle circonscrit** à un **triangle** est l'unique **cercle** qui contient les trois **sommets** de ce triangle.

Comment le construire ? Où est son centre ?

La **médiatrice** d'un **segment** est la **droite** qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui passe par son **milieu**.



a- Propriété :

soit [AB] un segment,

tout point de la médiatrice de [AB] est équidistant de A et de B ;

les points équidistants de A et de B sont sur la médiatrice de [AB].

b- Construction :

Il suffit de **tracer les médiatrices de deux côtés d'un triangle** ; d'après la propriété des médiatrices du triangle, la médiatrice du troisième côté passe nécessairement par ce point. C'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Remarque : les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices des côtés de ce triangle. Un triangle a donc trois médiatrices.

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concourantes en un point qui est équidistant des trois sommets.**

En effet, soit ABC un triangle et soit O le point d'intersection des médiatrices des côtés [AB] et [BC].

D'après la propriété de la médiatrice, O est équidistant de A et de B, et O est équidistant de B et de C. Donc O est équidistant de A et de C, et O est sur la médiatrice de [AC].

On en déduit que les trois médiatrices sont concourantes en O. De plus, nous avons vu que O est équidistant de A, B et C.

D'après la propriété précédente, le point de concours O des trois médiatrices d'un triangle ABC est équidistant des trois sommets du triangle. Le point O est donc **le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets de ABC**.

Ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au triangle ABC.

Remarque : il n'y a qu'un seul point équidistant de A, B et C puisque les trois médiatrices sont concourantes ; il n'y a donc qu'un seul cercle passant par les trois sommets d'un triangle ABC.

VII- Le Triangle :

1- Définition :

Polygone ayant trois **côtés** et trois **angles**. Il peut être **équilatéral** (si ses côtés sont égaux), **scalène** (si ses trois côtés sont inégaux deux à deux), s'il a un **angle droit**, il est dit **rectangle**.

La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180° ; c'est pourquoi, dans un triangle, il ne peut y avoir plus d'un angle supérieur ou égal à un angle droit.

Dans un triangle quelconque, il y a trois **hauteurs** (segments de perpendiculaire) allant d'un **sommet** au côté opposé ou à son prolongement), trois **médianes** (segment joignant un sommet au milieu du côté opposé), trois **bissectrices** (segment de la bissectrice d'un angle compris entre le sommet de l'angle et le côté opposé).

Les droites portant ces segments se rencontrent respectivement à l'**orthocentre**, au **barycentre**, et au **centre** du **cercle** inscrit dans le triangle ; de plus, les **médiatrices** des trois côtés d'un triangle concourent au centre du **cercle circonscrit** au triangle.

Alors que pour les polygones ayant quatre côtés ou plus il n'existe pas toujours un **cercle inscrit** et un cercle circonscrit, pour un triangle, ils existent toujours.

2- Comparaison :

Pour comparer deux triangles, on utilise les **critères d'égalité**. Deux triangles sont dits égaux, si l'un est l'image de l'autre par une **isomérie**. Deux triangles sont dits égaux s'ils ont deux côtés égaux ainsi que l'angle compris entre ces deux côtés, ou s'ils ont un côté égal ainsi que les angles qui lui sont **adjacents**, ou encore s'ils ont leurs trois côtés égaux.

Si deux triangles ont tous leurs angles égaux, ils ne sont pas nécessairement égaux, mais ils sont semblables et ont leurs côtés proportionnels.

3- Théorèmes :

Nous avons les théorèmes suivants concernant les triangles : au plus grand côté est opposé le plus grand angle, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux ; un côté est toujours plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence ; la bissectrice divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle ; les côtés sont inversement proportionnels aux hauteurs qui leurs correspondent.

4- Résolution d'un triangle :

a- Définition :

On appelle **résolution d'un triangle**, l'ensemble des opérations permettant de calculer ses six éléments (côtés et angles).

Dans un **triangle rectangle**, il existe entre les côtés une relation fondamentale, dite **théorème de Pythagore**, d'emploi fréquent.

Mais le problème de la résolution d'un triangle est résolu de façon complète par la **trigonométrie**. En **géométrie prospective**, on appelle triangle la figure formée par trois **points** non alignés et les trois **droites** qui les rejoignent deux-à-deux.

b- Typologie des triangles :

Les triangles isocèles et équilatéraux sont des triangles particuliers qui présentent respectivement deux et trois côtés égaux.

Quelles sont les propriétés de ces figures et comment peut-on les tracer ?

- Triangle isocèle :

a- Définition :

Un triangle isocèle est **un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.**
Remarque : si un triangle est équilatéral, alors ce triangle est isocèle (mais il existe des triangles isocèles qui ne sont pas équilatéraux).

b- Propriétés :

Tout triangle isocèle a au moins un axe de symétrie ; réciproquement, si un triangle a un axe de symétrie, alors ce triangle est isocèle.

Il faut garder le même écartement de compas.

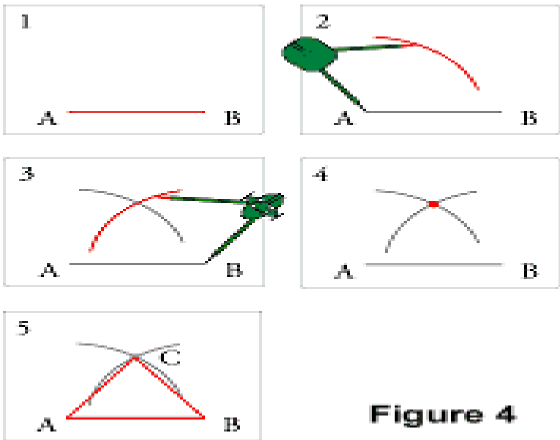


Figure 4

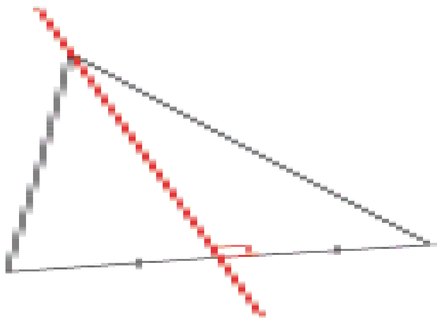


Figure 5

Dans un triangle isocèle, deux angles au moins ont la même mesure ; réciproquement, si dans un triangle deux angles au moins ont la même mesure, alors ce triangle est isocèle.

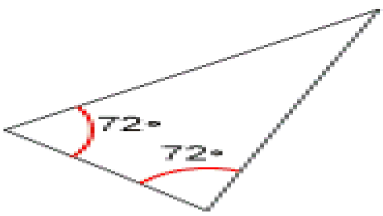


Figure 6

c- **Construction :**

On veut ici construire un triangle isocèle non équilatéral. La différence avec la construction précédente est que les écartements de compas des étapes 2 et 3 sont égaux, mais ne sont pas égaux à AB.

- **Triangles équilatéral :**

Un triangle équilatéral est **un triangle dont les trois côtés ont la même longueur.**
Le triangle 2 de la figure ci-dessous est donc un triangle équilatéral.

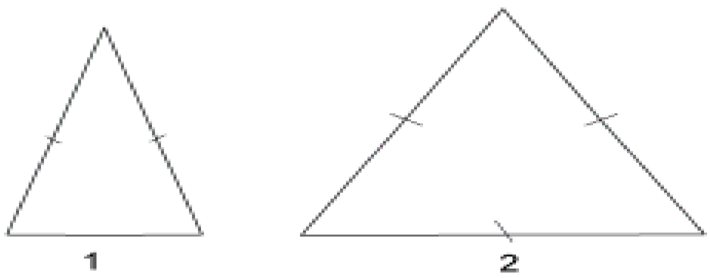


Figure 1

a- **Propriétés :**

Tout triangle équilatéral a trois axes de symétrie ; réciproquement, si un triangle a trois axes de **symétrie**, alors ce triangle est équilatéral.

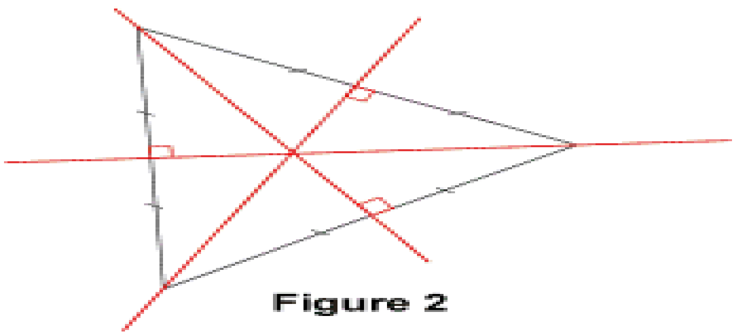


Figure 2

Dans un triangle équilatéral, chaque angle mesure 60° ; réciproquement, si dans un triangle chaque angle mesure 60°, alors ce triangle est équilatéral.

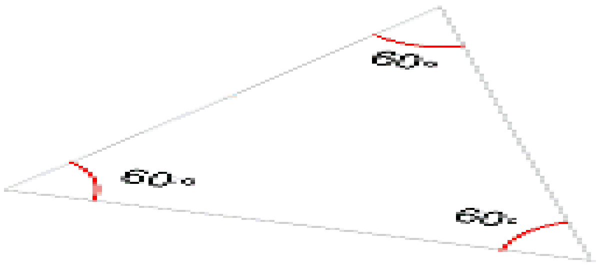


Figure 3

b- Construction :

On veut construire un triangle équilatéral avec la règle et le compas. La série de figures ci-dessous montre les étapes de la construction ; l'écartement du **compas** représente la longueur du côté.

I- Quotients : Ensemble des nombres rationnels :

Quand on voit $\frac{8}{3}$ (lire huit tiers ou bien huit sur trois), **que voit-on ? Un quotient ? Une écriture fractionnaire ? Une fraction ?** Peut-être les trois à la fois…

1- Lecture :

Le quotient de la division de 8 par 3 ne peut pas s'écrire sous forme décimale puisque la division de 8 par 3 ne tombe pas juste 8 ÷ 3 = 2,66, il reste 2.

Ce quotient existe pourtant bel et bien : c'est le nombre qui, multiplié par 3, est égal à 8.

Plus généralement, *a* et *b* étant deux nombres et *b* étant différent de 0, le quotient de la division de *a* par *b* est **le nombre obtenu en divisant *a* par *b***.

C'est donc le nombre qui, multiplié par *b*, est égal à *a.* Pour présenter ce nombre, on utilise une écriture fractionnaire.

2- Fractions :

Pour présenter le quotient de 8 par 3, on utilise la fraction $\frac{8}{3}$ (lire huit tiers ou huit sur trois).

Plus généralement, une fraction est **une écriture d'un nombre** sous la forme $\frac{a}{b}$ ou *a*/*b*, où *a* est un entier naturel et *b*, un entier naturel non nul.

Remarques :

Au sens strict, une fraction est donc une écriture qui représente un nombre ; elle n'est pas un nombre. Quand on dit : « j'additionne des fractions », on devrait dire : « j'additionne les nombres représentés par des fractions ».
Il est courant d'étendre la définition donnée au cas où le numérateur est un entier relatif ; ainsi $\frac{-8}{3}$ est considérée comme une fraction.

3- Écritures fractionnaires :

Une écriture fractionnaire d'un nombre est une écriture de ce nombre sous la forme $\frac{x}{y}$ (lire *x* sur *y*), où *x* représente un nombre et *y* représente un nombre différent de zéro.

Remarques :

Toute fraction est une écriture fractionnaire particulière.

Revenons à la question posée en introduction : lorsqu'on voit $\frac{8}{3}$, on voit une fraction. On peut dire également que l'on voit une écriture fractionnaire. Si l'on dit que l'on « voit » un **quotient** (c'est-à-dire un nombre) on commet un abus de langage ; mais cet abus, pour des raisons de commodité, est couramment pratiqué.

4- Méthode générale :

Lorsque l'on dit qu'un coureur a manqué la première place d'une course « pour une fraction de seconde », cela signifie qu'il lui a manqué quelques dixièmes, voire quelques centièmes de secondes pour être premier.

En **mathématiques**, prendre une fraction d'un nombre ou d'une quantité a un sens très précis.

Lequel ?

Exemple :

Dans une assemblée de 120 personnes, les trois quarts portent un pantalon. Pour trouver le nombre de personnes portant un pantalon, il suffit de savoir comment calculer les trois quarts de 120.

Trois quarts équivalent à trois fois un quart ($\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$).

Si l'on sait prendre un quart de 120, on saura donc prendre trois quarts de 120 en multipliant par 3.

Comme un quart de 120 équivaut à $120 \div 4 = \frac{120}{4}$, prendre les trois quarts de 120 revient à

Calculer $3 \times \frac{120}{3}$.

Puisque $\frac{120}{4} = 3$, on trouve $3 \times \frac{120}{4} = 90$.

Il y a donc 90 personnes qui portent un pantalon dans cette assemblée.

Remarque :

$\frac{3 \times 120}{4} = \frac{360}{4} = 90$; on en déduit que $3 \times \frac{120}{4} = \frac{3 \times 120}{4}$.

5- Généralisation :

On vient de voir que trois quarts de 120 équivalent à $3 \times \frac{120}{4}$ et que $\frac{3 \times 120}{4}$. On donne ainsi un sens au produit $\frac{3}{4} \times 120$, ce qui signifie « les trois quarts de 120 ». Plus généralement, et étant donné un nombre *n*, trois quarts de ce nombre *n* est égal à : $\frac{3}{4} \times n = 3 \times \frac{n}{4} = \frac{3 \times n}{4}$.

On peut encore généraliser et remplacer la fraction $\frac{3}{4}$ par n'importe quelle autre fraction.

Ainsi, si on considère une fraction notée $\frac{a}{B}$, avec $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ de *n* est égal à : $a \times \frac{n}{b} = \frac{a \times n}{b}$.

- **Cas particulier :**

Soit *a* un entier naturel. Si l'on veut prendre une fraction $\frac{a}{10}$, $\frac{a}{100}$ ou $\frac{a}{1000}$ d'un nombre, il suffit de le multiplier par *a*, puis de déplacer la virgule du résultat obtenu respectivement d'un, deux ou trois rangs vers la gauche.

Par exemple, $\frac{37}{100}$ de 12 (lire « trente-sept centièmes de douze ») est égal à 4,44 car 37 x 12 = 444.

De même, $\frac{23}{10}$ de 5,4 (lire « vingt-trois dixièmes de cinq virgule quatre ») est égal à 12,42 car $23 \times 5,4 = 124,2$.

6- Reconnaissance :

On veut répartir équitablement les 36 billes d'un paquet entre 4 personnes et les 27 billes d'un autre paquet entre 3 personnes. Il est facile de voir que dans les deux répartitions, chaque personne recevra 9 billes ; en effet $\frac{36}{4} = 9$ et $\frac{27}{3} = 9$. Les deux fractions $\frac{36}{4}$ et $\frac{27}{3}$ représentent le même nombre : on dit qu'elles sont égales. On peut s'en apercevoir en effectuant les divisions $36 \div 4$ et $27 \div 3$.

- **En utilisant une calculatrice :**

Si l'on dispose d'une calculatrice (celle d'un ordinateur, par exemple), il est facile de savoir si deux fractions sont égales : on effectue les quotients qu'elles représentent.

Par exemple, les fractions $\frac{102}{6}$ et $\frac{119}{7}$ sont égales car on a : $102 \div 6 = 17$ et $119 \div 7 = 17$.

- **Sans utiliser de calculatrice :**

Dans ce cas, reconnaître deux fractions égales suppose que l'on sache écrire une fraction égale à une fraction donnée.

On utilise alors la **règle** suivante : une fraction étant donnée, pour obtenir une fraction qui lui est égale, il suffit de multiplier ou de diviser son numérateur et son dénominateur par un même entier naturel différent de 0.

Par exemple, les fractions $\frac{15}{20}$ et $\frac{21}{28}$ sont égales car on a : $\frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$ et $\frac{21}{28} = \frac{21 \div 7}{28 \div 7} = \frac{3}{4}$.

7- Ecrire des fractions égales :

Écrire des fractions égales peut être nécessaire lorsqu'on doit effectuer **des additions ou des soustractions avec des fractions décimales.**

On utilise alors la règle déjà citée, dans le cas simple où les dénominateurs des fractions sont 10, 100 ou 1 000.

Par exemple, si l'on veut écrire le résultat de l'addition $3 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100}$ sous la forme d'une fraction décimale, il suffit d'écrire : $3 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} = \frac{3 \times 100}{100} + \frac{5 \times 10}{10 \times 10} + \frac{9}{100} = \frac{300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{9}{100} = \frac{359}{100}$.

8- Addition et soustraction :

Lorsqu'on veut effectuer l'addition ou la soustraction de nombres relatifs en écriture fractionnaire, on distingue deux cas : soit les écritures fractionnaires ont le même dénominateur, soit elles ont des dénominateurs différents.

a- Cas où le dénominateur est le même :

Sur la **figure 1**, on voit que les $\frac{3}{7}$ (lire *trois-septièmes)* du disque sont coloriés en rouge et les $\frac{2}{7}$ en vert.

On peut dire, sans préciser les couleurs, que les $\frac{5}{7}$ du disque sont coloriés.

On écrit : $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Règle **:**

- Pour additionner deux nombres dont les écritures fractionnaires ont le même dénominateur :
on conserve le dénominateur commun ;
on additionne les numérateurs.

- Pour soustraire deux nombres dont les écritures fractionnaires ont le même dénominateur :
on conserve le dénominateur commun ;
on soustrait les numérateurs.

Autrement dit, avec des lettres (*a*, *b* et *d* représentant des entiers relatifs ; $d \neq 0$) : $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a + b}{d}$ et $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a - b}{d}$.

Exemples :

$\frac{5}{13} + \frac{4}{13} = \frac{5 + 4}{13} = \frac{9}{13}$.

$\frac{7}{21} - \frac{11}{21} = \frac{7 - 11}{21} = \frac{-4}{21}$ (ce qui s'écrit aussi $-\frac{4}{21}$).

$$\frac{127}{91} + \frac{-41}{91} - \frac{23}{91} = \frac{127 + (-41) - 23}{91} = \frac{63}{91}.$$

b- Cas où les dénominateurs sont différents :

***Règle* :**

On ne change pas la valeur d'un quotient si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre différent de zéro.

Autrement dit, avec des lettres (a ; c et k représentant des nombres ; $c \neq 0$ et $k \neq 0$) : $\frac{a}{c} = \frac{ka}{kc}$

***Exemples* :**

$$\frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3}$$ et notamment : $5 = \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{3} = \frac{8 \times 5}{8} = \frac{17 \times 5}{17}$.

- Additionner ou soustraire :

***Règle* :**

Pour additionner (ou soustraire) des nombres qui n'ont pas le même dénominateur, on les remplace d'abord par des quotients ayant le même dénominateur (et représentant les mêmes nombres), puis on applique la règle énoncée dans la partie 1.

***Exemples* :**

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{12}{20} - \frac{13}{20} = \frac{-1}{20}$$

$$2 + \frac{3}{8} = \frac{2}{1} + \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{1 \times 8} + \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{1 \times 8} + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = \frac{16 + 3}{8} = \frac{19}{3}.$$

- ***Cas particuliers* :**

Si les dénominateurs sont des puissances de 10 (1 ; 10 ; 100 ;…), il est possible d'écrire d'abord les nombres sous forme décimale avant de les additionner ou de les soustraire.

$$\frac{3}{10} + \frac{27}{100} - \frac{7}{1000} = 0{,}3 + 1{,}27 - 0{,}007 = 1{,}563.$$

Si la somme comporte des nombres écrits sous forme décimale, on transforme ces écritures en écritures fractionnaires dont les dénominateurs sont des puissances de 10.

$$\frac{2{,}37 + 13}{3} = \frac{2{,}37 \times 100}{100} + \frac{13}{3} = \frac{2{,}37 \times 3}{100 \times 3} + \frac{13 \times 100}{3 \times 100} = \frac{711}{300} + \frac{1\,300}{300} = \frac{411 + 1\,300}{300} = \frac{2011}{300}.$$

9- Réduction :

Pour offrir un bracelet à leur mère, Jacques donne à son père les $\frac{3}{35}$ du prix du cadeau et Sophie donne les $\frac{4}{45}$. **De Jacques et de Sophie, qui a donné le plus ?**

À l'aide d'une calculatrice, on voit que : $\frac{3}{35} \approx 0{,}086$ et $\frac{4}{45} \approx 0{,}089$. C'est donc Sophie qui a donné le plus.

Existe-t-il une autre méthode pour résoudre ce type de problème ?

a- La méthode :

***Règle* :**

On ne change pas la valeur d'un quotient si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un **même nombre** différent de zéro.

Autrement dit, avec des lettres (*a* ; *c* et *k* représentant des nombres ; $c \neq 0$ et $k \neq 0$) : $\frac{a}{c} = \frac{ka}{kc}$

***Exemples* :** $\frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3}$ et notamment : $5 = \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{3} = \frac{9 \times 5}{9} = \frac{17 \times 5}{17}$

Exemple 1 **:** on veut écrire au même dénominateur les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{30}$.

On remarque que 30 est un multiple de 5 (30 = 5 × 6). D'où $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}$

$\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{30}$ représentent les mêmes nombres que $\frac{18}{30}$ et $\frac{7}{30}$.

On dit qu'on a réduit ces deux écritures fractionnaires au même dénominateur.

Exemple 2 **:**

On réduit maintenant au même dénominateur $\frac{\mathbf{3}}{12}$ et $\frac{\mathbf{7}}{20}$. Ce n'est pas aussi simple que dans le cas précédent. Les multiples vont faire la course.

Dans le tableau qui suit, on écrit dans la ligne du haut les premiers multiples de 12 et dans la ligne du bas les premiers multiples de 20 jusqu'à ce qu'on ait le même nombre, ici : **60**.

12	24	36	48	60
20	40	60		

60 est à la fois un multiple de 12 (60 = **5** × 12) et de 20 (60 =20 × **3**). On choisit donc ce nombre 60

pour réduire $\frac{3}{12}$ et $\frac{7}{20}$ au même dénominateur.

$\frac{3}{12} = \frac{3 \times 5}{12 \times 5} = \frac{15}{60}$ et $\frac{7}{20} = \frac{7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{21}{60}$

On a réduit $\frac{3}{12}$ et $\frac{7}{20}$ au même dénominateur.

Remarque **:**

60 est le plus petit multiple commun non nul de 12 et de 20. On écrit ppcm (12 ; 20) = 60.

Exemple 3 **:** réduction au même dénominateur de $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{21}$ et $\frac{7}{6}$.

On va utiliser la même méthode mais cette fois avec trois lignes dans le tableau.

6	12	18	24	30	36	42
14	28	42				
21	42					

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on choisit 42 comme dénominateur commun. On trouve alors :

$$\frac{5}{14} = \frac{5 \times 3}{14 \times 3} = \frac{15}{42}; \quad \frac{4}{21} = \frac{4 \times 2}{21 \times 2} = \frac{8}{42}; \quad \frac{7}{6} = \frac{7 \times 7}{6 \times 7} = \frac{49}{42}$$

On a réduit $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{21}$ et $\frac{7}{6}$ au même dénominateur.

Remarque **:** 42 est le plus petit multiple commun non nul de 14, 21 et 6. Au lieu de faire la course aux multiples, on peut décomposer 14, 21 et 6.
$14 = 2 \times 7$; $21 = 3 \times 7$ et $6 = 2 \times 3$.
42, qui est égal à $2 \times 7 \times 3$ est un multiple non nul commun à 14, 21 et 6.

b- Applications :

Règle :

Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire, on peut les réduire au même dénominateur positif puis comparer les nouveaux numérateurs. Les deux nombres sont rangés dans le même ordre (que les nouveaux numérateurs).

Exemple 1 **:** on veut comparer $\frac{10}{21}$ et $\frac{-9}{7}$.

Une méthode consiste à réduire au même dénominateur. On peut remarquer que $105 = 21 \times 5$ et $105 = 35 \times 3$. On a donc : $\frac{10}{21} = \frac{10 \times 5}{21 \times 5} = \frac{50}{105}$ et $\frac{16}{35} = \frac{16 \times 3}{35 \times 3} = \frac{48}{105}$.

$\frac{50}{105}$ et $\frac{48}{105}$ ont le même dénominateur positif ; comparons les numérateurs : $50 > 48$ donc : $\frac{50}{105} > \frac{48}{105}$.

Finalement, $\frac{10}{21} > \frac{16}{35}$.

Exemple 2 **:** comparaison de $\frac{5}{2}$ et $\frac{-5}{7}$.

On commence par rendre positif le dénominateur du deuxième nombre : $\frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$.

Puis on réduit au même dénominateur. On trouve : $70 = 10 \times 7$ et $70 = 7 \times 10$. D'où $\frac{-7}{10} = \frac{-7 \times 7}{10 \times 7} = \frac{49}{70}$ et $\frac{5 \times 10}{7 \times 10} = \frac{-50}{70}$.

$-49 > -50$ donc $\frac{-49}{70} > \frac{-50}{70}$ et finalement : $\frac{5}{2} > \frac{5}{-7}$.

On veut calculer $\frac{4}{15} - \frac{7}{6} + \frac{11}{20}$.

60 est un multiple commun à 15, 6 et 20 donc $\frac{4}{15} - \frac{7}{6} + \frac{11}{20} = \frac{4 \times 4}{15 \times 4} - \frac{7 \times 10}{6 \times 10} + \frac{11 \times 3}{20 \times 3} = \frac{16}{60} - \frac{70}{60} + \frac{33}{60} = \frac{21}{60}$.

$\frac{21}{60}$ peut se simplifier par 3 : $\frac{21}{60} = \frac{21 \div 3}{60 \div 3} = \frac{7}{20}$.

Finalement : $\frac{4}{15} - \frac{7}{6} + \frac{11}{20} = \frac{7}{20}$.

II- Identités remarquables :

Soit a et b deux nombres positifs. Le carré ABCD représenté sur la figure 1 a pour côté $a + b$. À l'intérieur, sont construits deux autres carrés de côtés respectifs a et b, et deux rectangles de mêmes dimensions a et b.

L'aire de ABCD peut se calculer par deux méthodes différentes :

***Première méthode* :** c'est l'aire d'un carré de côté $a + b$, soit $(a + b)^2$.

***Seconde méthode* :** c'est aussi l'aire du carré de côté a, plus les aires des deux rectangles, plus l'aire du carré de côté b, soit $a^2 + ab + ab + b^2$.

De ces deux calculs, on déduit l'égalité : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. C'est une identité remarquable.

1- Les Trois identités remarquables :

- ***Deux identités semblables :***

L'égalité écrite en introduction reste vraie quels que soient les signes des nombres a et b. On a ainsi, pour tous nombres a et b :

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ **;**

$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$**.**

***Remarques* :**

à gauche du signe **« = »** figure la forme factorisée de l'identité ; à sa droite, on trouve la forme développée ;
les expressions développées ne diffèrent que par le signe du terme $2ab$, appelé « **double-produit** », ce qui permet de les retenir facilement ;

pour retrouver la deuxième identité à partir de la première, on peut écrire $(a - b)^2 = [a + (-b)]^2$, donc $(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- ***Une autre identité :***

Soit a et b deux nombres positifs. On a ôté d'un grand carré de côté a un petit carré de côté b.

Calculons l'aire de la surface restante jaune par deux méthodes.

***Première méthode* :** c'est la différence entre l'aire du grand carré et l'aire du petit carré, soit $a^2 - b^2$.

***Seconde méthode* :** on fait un découpage de la surface restante, puis on recompose les morceaux. On obtient un rectangle dont les dimensions sont $a + b$ et $a - b$. Son aire est égale à $(a + b)(a - b)$.

On obtient ainsi : $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$.

Cette égalité est vraie quels que soient les signes des nombres a et b.

2- Applications :

Soit x un nombre. On veut développer les expressions suivantes : $(2x + 3)^2$; $(3x - 4)^2$ et $(5x + 2)(5x - 2)$.

$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$

$(5x + 2)(5x - 2) = (5x)^2 - 2^2 = 25x^2 - 4$

Soit x un nombre.

***Exemple 1* :**

On veut factoriser les expressions : $9x^2 - 12x + 4$; $81 - 9x^2$ et $16x^2 + 24x + 9$

$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$

$81 - 9x^2 = 9^2 - (3x)^2 = (9 + 3x)(9 - 3x)$

$16x^2 + 24x + 9 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = (4x + 3)^2$

***Exemple 2* :** on veut factoriser l'$10\ ^2 - (5x + 3)^2$.

On reconnaît ici une expression de la forme $a^2 - b^2$, où le rôle de a est joué par la parenthèse $(2x + 1)$ et celui de *b* par la parenthèse $(5x + 3)$.

On a donc $(2x + 1)^2 - (5x + 3)^2 = [(2x + 1) + (5x + 3)][(2x + 1) - (5x + 3)]$

On termine en réduisant chaque crochet : $(2x + 1 + 5x + 3)(2x + 1 - 5x - 3) = (7x + 4)(-3x - 2)$

On veut calculer mentalement : 53^2 ; 79^2 et 41×39.

On transforme chaque écriture pour pouvoir utiliser une identité remarquable. Les étapes détaillées ci-dessous sont à effectuer mentalement dans la pratique :

$53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 3 + 3^2 = 2\,500 + 300 + 9 = 2\,809$

$79^2 = (80 - 1)^2 = 80^2 - 2 \times 80 \times 1 + 1^2 = 6\,400 - 160 + 1 = 6\,241$

$41 \times 39 = (40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1\,600 - 1 = 1599$

III- Encadrements :

Les nombres relatifs écrits sous cet axe sont les **abscisses** des points marqués sur la droite.

Par exemple, le point B a pour abscisse -4 ; le nombre +3 est l'abscisse du point A.

Sur cet axe, on considère qu'il y a un **sens de parcours** : de la gauche vers la droite ; ce sens est symbolisé par la flèche. Grâce à ce sens de parcours, on peut dire par exemple que B est **avant** le point A, ce que l'on traduit par -4 est **inférieur** à +3 et que l'on note : $-4 < +3$.

De même, B est avant D, et donc : $-4 < -2$.

1- Définition :

Soient A et B deux points d'un axe, d'abscisses respectives a et b. Dire que a est inférieur à b signifie que A est avant B. On note : $a < b$.

- **Application :**

Soient a et b deux nombres différents de 0. Si a **est négatif** et si b **est positif,** alors $a < b$.

Exemples : -25 < +34 ; -0,02 < +3,8.

Soient a et b deux nombres. Si $a < b$, alors $-b < -a$.

Exemples : 12 < 28, c'est-à-dire +12 < +28, donc : -28 < -12 ;

0,18 < 0,2 donc : -0,2 < -0,18.

- **Dans l'ordre croissant :**

On veut ranger ces Dans l'ordre croissant signifie du plus petit au plus grand.

Considérons les nombres : -4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8.

nombres dans l'ordre croissant.

On cherche le plus petit nombre. C'est **-12** car : -12 < -4 et -12 < 0 et -12 < +7, etc.

On barre -12 de la liste : -4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8.

On cherche le plus petit nombre parmi ceux qui restent. C'est **-9**.

On barre -9 de la liste : -4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8.

Et ainsi de suite.

On obtient successivement : **-12** ; **-9** ; -4 ; 0 ; +3 ; +7 ; +8.

Ainsi écrits, ces nombres sont rangés dans l'ordre croissant.

On peut aussi écrire : -12 < -9 < -4 < 0 < +3 < +7 < +8.

Remarque :

On peut aussi commencer par séparer les nombres à ranger en deux groupes : les nombres strictement négatifs : -4, -12, -9, et les nombres positifs : 0, +7, +3, +8 ; on ordonne d'abord les nombres négatifs : -12 < -9 < -4, puis les positifs : 0 < +3 < +7 < +8.

On en déduit que : -12 < -9 < -4 < 0 < +3 < +7 < +8.

- **Dans l'ordre décroissant :**

Dans l'ordre décroissant signifie du plus grand au plus petit.

Reprenons l'exemple précédent. On veut ranger ces nombres dans l'ordre décroissant.

Si l'on connaît la liste des nombres dans l'ordre croissant, il suffit d'écrire cette **liste à l'envers**, ce qui donne : +8 ; +7 ; +3 ; 0 ; -4 ; -9 ; -12 ; ou encore : +8 > +7 > +3 > 0 > -4 > -9 > -12.

Si l'on ne connaît pas la liste des nombres dans l'ordre croissant, on procède comme dans le paragraphe précédent : on commence par chercher le plus grand nombre (+8) ; on le barre de la liste ; on cherche le plus grand nombre parmi ceux qui restent (+7) ; etc.

IV- Calcul sur les proportions :

On dit que des **grandeurs** sont **proportionnelles** si l'on peut passer de l'une à l'autre en passant toujours par le même nombre.

Quelles méthodes peut-on utiliser pour bien s'en assurer ?

Cinq cahiers valent 30 €.

Comment calculer le prix de sept cahiers ?

On cherche d'abord le prix d'un cahier :

On a $30 \div 5 = 6$.

Le prix d'un cahier est de 6 €.

On multiplie alors le prix d'un cahier par sept :

On a $6 \times 7 = 42$.

Le prix des sept cahiers est de 42 €.

1- Le Rapport linéaire :

Le rapport de linéarité est un **décimal**.

Exemple 1 :

Un homme parcourt à allure régulière 350 m en cinq minutes.

Comment calculer la distance parcourue en dix minutes, puis en quinze minutes ?

10 minutes est le double de 5 minutes.

La distance parcourue en 10 minutes est le double de celle parcourue en 5 minutes, soit $2 \times 350 = 700$ m.

L'homme parcourt 700 m en 10 minutes.

Pour trouver la distance parcourue en 15 minutes, on peut d'abord observer que : $10 + 5 = 15$.
Pour trouver la distance parcourue en 15 minutes, on additionne la distance parcourue en 10 minutes et celle parcourue en 5 minutes.

On obtient alors : 700 + 350 = 1050.

L'homme parcourt 1050 m en 15 minutes.

Exemple 2 :

Pour faire un gâteau, il faut 100 g de beurre et 300 g de farine.

Comment calculer la quantité de beurre pour 540 g de farine ?

Le beurre représente le tiers de la farine.

La quantité de beurre pour 540 g de farine est = **(540 ÷ 3) × 1 = 180**.

Il faut 180 g pour 540 g de farine.

2- Utilisation du coefficient de proportionnalité :

Le coefficient est un décimal.

Exemple 1:

Deux DVD coûtent 18,90 €.

Comment calculer le prix de 5 DVD ?

On utilise un tableau de proportionnalité et on cherche le coefficient de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité est : 18,90 ÷ 2 = 9,45.

On multiplie alors 5 par ce coefficient.

On obtient 5 × 9,45 = 47,25.

Le prix de 5 DVD est de 47,25 €.

Le coefficient n'est pas un décimal.

Avec 40 kg de blé, on obtient 30 kg de farine.

Comment trouver la quantité de blé pour produire 54 kg de farine ?

On utilise un tableau de proportionnalité et on cherche le coefficient de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité est : $40 \div 30$.

Or, le quotient obtenu n'est pas un décimal. Le coefficient cherché est la fraction.

On multiplie alors 54 par cette fraction.

On obtient : $54 \times = (54 \div 3) \times 4 = 18 \times 4 = 72$.

Il faut donc 72 kg de blé pour obtenir 54 kg de farine.

3- Reconnaissance :

Dans un magasin, Paul achète deux cahiers et paie 1,8 €.

Laure en achète 5 et paie 4,5 €.

Le prix d'un cahier est-il toujours le même quel que soit le nombre de cahiers achetés ?

Comment reconnaître s'il y a ou non proportionnalité ?

4- Reconnaissance de proportionnalité :

Beaucoup d'exemples de situations de proportionnalité peuvent être tirés de la vie courante.

Le prix d'une baguette de pain est proportionnel au nombre de baguettes achetées. En effet, si le prix d'une baguette est de 0,98 €, le prix de deux baguettes est de 1,96 €.

Le prix d'un plein d'essence est proportionnel au nombre de litres achetés. Si un litre coûte 1,23 €, dix litres coûtent 12,3 €.

Ces deux exemples décrivent une situation de proportionnalité.

En revanche, l'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à la longueur du côté de ce carré. Un carré de 2 cm de côté a pour aire 4 cm^2 et un carré de 3 cm de côté a pour aire 9 cm^2.

On obtient 4 en multipliant 2 par 2.
Or $3 \times 2 = 6$ et non 9.

Cet exemple décrit une situation de non proportionnalité.

Deux grandeurs sont proportionnelles si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé coefficient de proportionnalité.

5- Tableau de proportionnalité :

Un tableau de proportionnalité est un tableau dans lequel on peut passer de la première à la deuxième ligne en multipliant toujours par le même nombre (**coefficient**).

Une présentation des problèmes sous forme d'un tableau permet ainsi de faire apparaître plus facilement s'il s'agit d'une situation de proportionnalité ou de non proportionnalité.

On indiquera dans le tableau les unités utilisées.
En reprenant les trois exemples décrits précédemment (le prix du pain, le prix de l'essence et l'aire du carré) nous pouvons ainsi dresser les tableaux suivants :

Pour connaître le prix de deux baguettes, on multiplie 2 par 0,98. Ainsi, 0,98 est le coefficient de proportionnalité.

Pour connaître le prix de dix litres d'essence, on multiplie 10 par 1,23. Ainsi, 1,23 est le coefficient de proportionnalité.

Il n’existe pas de coefficient de proportionnalité permettant de passer de la première ligne à la seconde. Il s’agit d’une situation de non proportionnalité.

Exemple 1 : une recette de cuisine

Les quantités d'une recette de cuisine sont souvent données pour six personnes.

Comment les adapter à quatre personnes ?

Un gâteau nécessite 150 grammes de farine pour six personnes.

Pour trouver la quantité nécessaire pour quatre personnes, on dresse un tableau de proportionnalité.

On a $150 \div 6 = 25$ et $6 \times 25 = 150$.
Le coefficient de proportionnalité est 25.

On obtient alors $4 \times 25 = 100$.

Il faut donc 100 g de farine pour quatre personnes.

Exemple 2 : un problème de durée

Une voiture roule toujours à la même vitesse.

Comment calculer la distance parcourue en un temps donné ?

Une voiture parcourt 180 km en 2 h.

Pour trouver la distance parcourue en 5 h, on dresse un tableau de proportionnalité.

On a $180 \div 2 = 90$ et $2 \times 90 = 180$.

Le coefficient de proportionnalité est 90.

On obtient alors $5 \times 90 = 450$.

La voiture parcourt 450 km en 5 h.

Exemple 3 : un problème d'âge

Laure à 7 ans et sa mère 35 ans.

Lorsque Laure aura 14 ans, **quel âge aura sa mère ?**

Attention, certaines situations sont trompeuses : ainsi, dans 7 ans, Laure aura 14 ans (le double de son âge actuel) ; toutefois, sa mère n'aura pas le double de son âge mais simplement $35 + 7 = 42$ ans.

Il n'y a pas proportionnalité entre l'âge de Laure et celui de sa mère.

V- Quadrilatères :

1- Définition :

Un **quadrilatère** est un **polygone** à quatre **côtés**. Deux côtés sont dits consécutifs s'ils concourent en un même **sommet**. Deux côtés non consécutifs sont dits opposés. Les **droites** joignant deux sommets opposés sont les **diagonales**. La somme des **angles** intérieurs d'un quadrilatère vaut 360°.

2- Typologie :

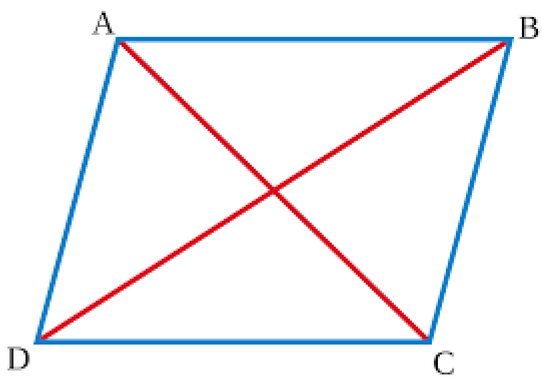
Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles est un **parallélogramme**. S'il n'y a que deux côtés parallèles, le parallélogramme est un **trapèze**. Un quadrilatère peut être inscrit dans un **cercle** si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires.

Un quadrilatère peut être circonscrit à un cercle si les sommes des **longueurs** de deux côtés opposés sont égales.

a- Rectangle :

Parallélogramme ayant tous ses angles égaux (donc droits). Les **rectangles** et les **carrés** sont des quadrilatères particuliers.

Les diagonales du rectangle sont égales ; si a et b sont les longueurs de ses côtés, la longueur de la diagonale est : $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un rectangle ou d'un carré ?

Exemple1 : Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Si un quadrilatère est un parallélogramme et a un angle droit au moins, alors ce quadrilatère est un rectangle. Autrement dit, les quatre angles du quadrilatère considéré sont droits.

Exemple 2 : sur la figure 1, AB = CD = 3 cm et BC = AD = 2 cm, donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme puisque ses côtés opposés ont deux à deux la même longueur.

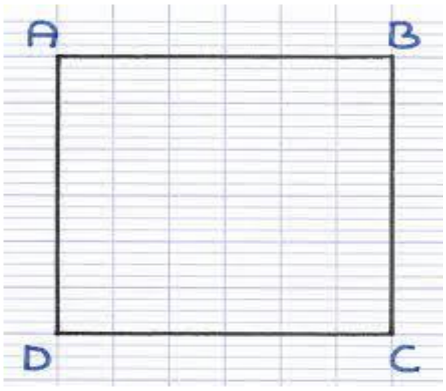
De plus, l'angle Â est droit ; on peut alors affirmer que ABCD est un rectangle.

Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle. Autrement dit, le quadrilatère considéré a nécessairement quatre angles droits.

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.

b- Carré :

Polygone régulier ayant quatre côtés. Il résulte de cette définition qu'un carré a ses angles et ses côtés égaux.



Exemple 1 : Démontrer qu'un quadrilatère est un carré.

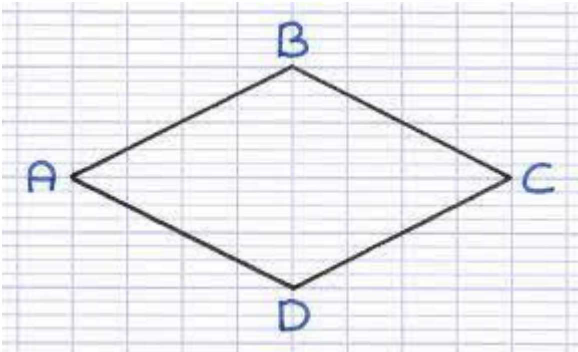
On peut commencer par démontrer que le quadrilatère est un rectangle ou un losange.

Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.

Exemple : sur la figure 4, le quadrilatère ABCD est un rectangle puisqu'il a trois angles droits ; de plus, AB = BC = 3 cm ; ABCD est donc un carré. Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.

c- Losange :

Parallélogramme ayant tous ses côtés égaux. Les diagonales sont les **bissectrices** des angles du losange et sont perpendiculaires entre elles.



Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un losange ?

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.

Si un losange a un angle droit au moins, alors c'est un carré.

Remarque : si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange (puisqu'on sait que les côtés opposés d'un parallélogramme ont deux à deux la même longueur).

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.

si un quadrilatère admet les supports de ses diagonales comme axes de symétrie, alors c'est un losange ;

si les supports des diagonales d'un quadrilatère sont les bissectrices de ses angles, alors ce quadrilatère est un

losange ;

si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

VI- Equations - Inéquations :

A- Equation :

$2x - 7 = 4$ est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, représenté par la lettre x.
On dit que $2x - 7 = 4$ est une équation d'inconnue x.

Comment résoudre une équation d'inconnue x, c'est-à-dire comment chercher les valeurs de l'inconnue pour **lesquelles l'égalité est vraie ?**

1- Définition :

a et b sont deux nombres et a n'est pas nul. Une équation du premier degré à une inconnue est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax = b$, où x désigne l'inconnue.

Remarque **:** on peut utiliser n'importe quelle lettre à la place de x (le plus souvent, on utilise x, y, z ou t).

Exemples **:**

$3x = 7$ est une équation du premier degré d'inconnue x.

$-2{,}7t = 4{,}8$ est une équation du premier degré d'inconnue t.

$X + 4 = -3x + 7$ est également une équation du premier degré d'inconnue x, dont on verra qu'elle peut s'écrire $4x = 3$.
En revanche, $x^2 = 3$ n'est pas une équation du premier degré, car l'inconnue x figure au carré.

2- Méthode :

On utilise généralement les deux règles suivantes :

on ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres de l'équation ; ainsi $a + x = b$ équivaut à $a + x - a = b - a$ donc à $x = b - a$;

on ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou divise chaque membre de l'équation

par un même nombre non nul ; ainsi $ax = b$ équivaut à $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ donc à $x = \frac{b}{a}$.

Remarque : une équation du premier degré à une inconnue admet en général une et une seule solution.

Exemple 1 :

On veut résoudre l'équation : $3x + 4 = 0$.
Retranchons 4 aux deux membres de cette équation. On obtient :

$3x + 4 - 4 = 0 - 4$
$3x = -4$

Multiplions chaque membre par $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times (-4)$

$X = -\frac{4}{3}$

$\frac{-4}{3}$ est la solution de l'équation $3x + 4 = 0$.

Exemple 2 :

On veut résoudre l'équation : $2x + 5 = 7$.
Retranchons 5 aux deux membres de cette équation.

On obtient :

$2x + 5 - 5 = 7 - 5$
$2x = 2$

Divisons par 2 chaque membre : $x = 1$

1 est la solution de l'équation $2x + 5 = 7$.

Exemple 3 :

On veut résoudre l'équation : $3(x + 2) = 5 - 4x$.
On développe d'abord le premier membre. On obtient : $3x + 6 = 5 - 4x$
On ajoute $-6 + 4x$ à chaque membre : $3x + 6 - 6 + 4x = 5 - 4x - 6 + 4x$
On simplifie les écritures de chaque membre :

$7x = -1$

$X = \frac{-1}{3}$

$\frac{-1}{3}$ est la solution de l'équation : $3(x + 2) = 5 - 4x$.

Exemple 4 :

On veut résoudre l'équation : $\frac{2}{3} x + \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$.

On retranche $\frac{4}{5}$ à chaque membre :

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{10} - \frac{8}{10}$$

$$\frac{2}{3}x = -\frac{3}{10}$$

On multiplie chaque membre par $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times x = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{10}\right)$$

$$X = -\frac{9}{10}$$

$\frac{-9}{10}$ est la solution de l'équation : $\frac{2}{3} x + \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$.

3- Mettre un problème en équation :

Une bouteille et son bouchon ont une masse totale de 110 g. La bouteille seule pèse 100 g de plus que le bouchon.

Quelle est la masse du bouchon ?

Si on répond sans réfléchir, on a envie de dire que la masse du bouchon est de 10 g, ce qui est faux. En effet, la bouteille pèserait 100 g de plus, donc 110 g, et au total la bouteille et le bouchon pèseraient 120 g (110 + 10 = 120). En réalité le bouchon a une masse de 5 g et la bouteille une masse de 105 g.

Comment résoudre un problème à l'aide d'une équation et éviter ce type d'erreur ?

a- Énoncé :

Pour fleurir un parterre, un jardinier plante des bulbes de tulipes. Le tiers des bulbes donnera des tulipes rouges, le quart donnera des tulipes blanches, le sixième donnera des tulipes noires et un autre sixième des tulipes jaunes. Enfin, il plante 3 bulbes de tulipes roses.

Combien de bulbes le jardinier a-t-il plantés ?

Soit x le nombre total de bulbes plantés ; x est un entier positif.

Remarques :

choisir une inconnue revient à imaginer qu'on connaît déjà la réponse ;

très souvent, il est commode de choisir comme inconnue ce qu'on demande de trouver (ici, le nombre de bulbes plantés).

b- Mise en équation :

Mettre le problème en équation revient à traduire l'énoncé en fonction de x.

Le jardinier plante : $\frac{1}{3}x$ tulipes rouges ; $\frac{1}{4}x$ tulipes blanches ; $\frac{1}{6}x$ tulipes noires ; $\frac{1}{6}x$ tulipes jaunes ; et enfin 3 tulipes roses.

Il a planté au total *x* bulbes de tulipes.

Exprimons d'une autre manière le nombre total de bulbes plantés, en faisant la somme des nombres

de bulbes de chaque espèce : $\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} x +$ bulbes ont été plantés.

On a donc l'équation : $x = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} x + 3$.

4- Résolution de l'équation :

On regroupe tous les x dans le premier membre (ce qui revient à retrancher $\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} x$

dans les deux membres). On obtient : $x - \frac{1}{3} x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{6} x - \frac{1}{6} x = 3$.

Factorisons x dans le premier membre : $\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) x = 3$

En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\left(\frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} - \frac{2}{12}\right) x = 3$

$\frac{1}{12} x = 3$.

On multiplie chaque membre par 12 : $x = 36$

Le jardinier a planté au total 36 tulipes.

En effet, il y a : 12 tulipes rouges ($\frac{1}{3} x\ 36 = 12$), 9 tulipes blanches ($\frac{1}{4} x\ 36 = 9$), 6 tulipes noires et

6 tulipes jaunes ($\frac{1}{6} x\ 36 = 6$) et 3 tulipes roses.

On vérifie que : $12 + 9 + 6 + 6 + 3 = 36$.

5- Un problème géométrique : le bassin

Énoncé :

On souhaite creuser dans un parc un bassin rectangulaire entouré d'une allée de 2 m de large. La largeur du bassin est de 8 m.

Quelle doit être la longueur du bassin pour que l'aire du bassin soit égale à l'aire de l'allée ?

Soit x la longueur en mètres du bassin. x est un nombre positif.
Le bord extérieur de l'allée forme un rectangle (ABCD sur la figure 1). Sa largeur est de 12 m ($2 + 8 + 2 = 12$). Exprimons sa longueur à l'aide de x : sa longueur en mètres est $x + 4$ ($2 + x + 2 = x + 4$).

L'aire de ce grand rectangle en m^2 est donc : $12(x + 4)$.
L'aire du bassin est (en m^2) : $8x$.

Dire que l'aire de l'allée est égale à l'aire du bassin revient à dire que l'aire du grand rectangle est le double de l'aire du bassin. On a donc l'équation : $12(x + 4) = 2 \times 8x$.

6- Résolution de l'équation :

Développons le premier membre. On obtient : $12x + 48 = 16x$
On regroupe tous les x dans le deuxième membre (ce qui revient à retrancher $12x$ dans les deux membres).
On obtient : $48 = 16x - 12x$
$48 = 4x$

On divise chaque membre par 4 :
$12 = x$

La longueur du bassin doit être de 12 m pour que les aires du bassin et de l'allée soient égales.
On vérifie en effet que l'aire du bassin est alors de 96 m^2 ($8 \times 12 = 96$) et que l'aire de l'allée est aussi de 96 m^2 ($(12 \times 16) - 96 = 96$).

B- Inéquation :

Les méthodes de résolution des équations et des inéquations se ressemblent ; cependant, contrairement aux équations qui n'ont le plus souvent qu'un nombre fini de solutions, une inéquation admet en général une infinité de solutions.

Comment déterminer et représenter une inéquation du premier degré à une inconnue ?

1- Définition :

Une inéquation est une **inégalité** où figure une lettre appelée l'**inconnue.**

Rappel : les 4 symboles d'inégalité sont :

≤ qui se lit « inférieur ou égal à » ;

≥ qui se lit « supérieur ou égal à » ;

< qui se lit « strictement inférieur à » ;

> qui se lit « strictement supérieur à ».

Exemples : $2x - 8 \geq 6 - 3x$ et $7x + 2,1 < 45$ sont des inéquations d'inconnue x.

2- Résolution :

On dit qu'un nombre est une solution d'une inéquation si on obtient une **inégalité qui est vraie** quand on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'inéquation.

Exemple : considérons l'inéquation $2x + 3 > 5$.
Est-ce que 2 est une solution ?

Si on remplace x par 2 dans l'inéquation, on obtient : $2 \times 2 + 3 > 5$, soit $7 > 5$.

Cette inégalité est vraie, donc 2 est une solution.

Est-ce que 1 est une solution ?

Si on remplace x par 1 dans l'inéquation, on obtient : $2 \times 1 + 3 > 5$, soit $5 > 5$.

Cette inégalité est fausse, donc 1 n'est pas une solution.

Résoudre une inéquation, c'est trouver **toutes ses solutions**.

3- Méthode :

La méthode ressemble à celle utilisée pour les équations du premier degré à une inconnue, à une différence importante près. Rappelons en effet que dans une inégalité, on peut :

- ajouter ou soustraire un même nombre de part et d'autre du symbole d'inégalité ;

- multiplier ou diviser par un même nombre différent de 0 de part et d'autre du symbole d'inégalité, mais si ce nombre est **négatif,** il faut **changer le sens de l'inégalité**.

Exemple 1 : on veut résoudre l'inéquation $2x + 3 > 5$. Elle équivaut successivement à :

$2x > 5 - 3$

$2x > 2$

$x > 1$: la résolution s'achève à cette étape.

On remarque que cette inéquation admet une **infinité** de solutions qui correspondent à tous les nombres strictement supérieurs à 1.

Exemple 2 : on veut résoudre l'inéquation $4x - 1 \geq 7x + 11$.

Cette inéquation équivaut successivement à :

$4x - 7x \geq 11 + 1$

$-3x \geq 12$

$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{12}{-3}$: on notera le changement de sens de l'inégalité.

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à - 4.

VII- Polyèdres et corps ronds :

1- Définition :

Ensemble borné de **points** de l'**espace** limité par des **polygones** (**faces**) qui ne sont pas toujours **coplanaires** et qui sont disposés de telle que leurs côtés (**arêtes**) soient communs à deux polygones et à deux seulement.

On suppose en général que deux faces ne sont jamais coplanaires, qu'elles n'ont en commun que les arêtes, et que tout sommet appartient à trois arêtes au moins.

Dans un **polyèdre convexe**, en même temps qu'une arrête, on considère le **dièdre** ayant pour faces les plans des polygones dont l'arête est commune.

2- Typologie :

Pour les polyèdres, on peut envisager différents types de classification : la classification métrique met en évidence les **polyèdres réguliers**, la classification affine les **prismes**, la classification projective les **pyramides**, etc.

a- Polyèdre régulier, un polyèdre est dit régulier si faces sont des polygones réguliers égaux

entre eux. Dans l'espace ordinaire, il existe 5 polyèdres réguliers convexes : le **tétraèdre** (qui a pour faces 4 **triangles équilatéraux**), l'**hexaèdre** (qui a pour faces 6 **carrés**), l'**octaèdre** (qui a pour faces 8 triangles équilatéraux), le **dodécaèdre** (qui a pour faces 12 **pentagones** réguliers), l'**icosaèdre** (qui a pour faces 20 triangles équilatéraux).

Dans l'espace euclidien de dimension supérieure à 4, il n'existe que trois types de polyèdres réguliers qui rappellent respectivement le tétraèdre, l'hexaèdre et l'octaèdre, tandis que dans l'espace de dimension 4, à ces trois types de polyèdre s'en ajoutent trois autres.

b- Polyèdre archimédien, un polyèdre est dit archimédien si toutes ses faces sont des

Polygones réguliers pas forcément égaux : il en existe 15 types.

c- **Angle polyèdre ou secteur polyèdre**, portion illimitée d'espace limitée par des parties planes

qui sont des secteurs angulaires ayant même sommet. A tout sommet d'un polyèdre, on peut associer un angle polyèdre ayant pour faces les plans des polygones qui passent par ce sommet.

VIII- Projection :

Méthodes au moyen desquelles on représente **graphiquement** la surface de la **Terre** ou l'une de ses parties (**projections géographiques**), au moyen d'une **échelle** convenable et avec la plus grande exactitude possible.

Les projections géographiques qui se rapprochent le plus de la réalité sont celles qui sont dessinées sur un **globe** figurant avec une correspondance suffisante le **géoïde** terrestre.

Toute autre représentation est approximative, car les surfaces sphériques ne peuvent pas être développées sur un **plan**.

Toutefois, on peut trouver et choisir des projections géographiques qui permettent de réduire au minimum des discordances (**déformations**) avec la surface terrestre réelle représentée, et de maintenir intactes les caractéristiques des **point** et **lieux** essentiels, correspondant aux finalités de la carte elle-même.

Déformation des longitudes dans la projection de Mercator

1- Méthodes et types :

Les **méthodes graphiques** utilisées sont celles de la **géométrie**, appelées **perspectives simples**, ou **azimuthales**, ou **zénithales**.

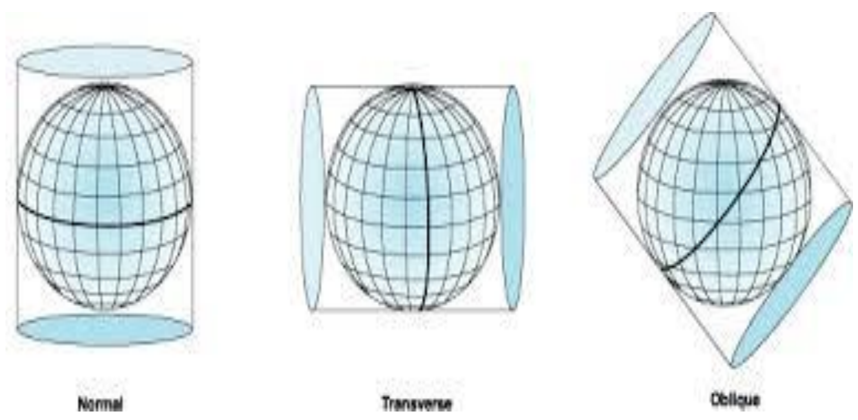
Des diverses combinaisons de ces méthodes, on peut obtenir douze projections géographiques perspectives simples et un certain nombre de projections géographiques perspectives plus complexes.

En partant d'un point de vue qui peut être placé au centre du **globe** terrestre (**projection centrale** ou **gnomonique**), à l'extrémité d'un diamètre tracé orthogonalement au centre du plan (**projection stéréographique**), en un point placé à l'infini par rapport à la droite reliant le centre du globe et l'extrémité du diamètre précédent (**projection orthographique**), en un point extérieur , toujours par rapport au diamètre précédent (**projection scénographique**).

On garde la correspondance des **angles** et des **côtés** des **routes**, comme dans les **cartes nautiques** ; dans ce cas, les projections sont dites **équivalentes** ou **homolographiques**.

On conserve inaltérées les distances dans les **cartes routières** et, dans ce cas, les projections sont dites **équidistantes**.

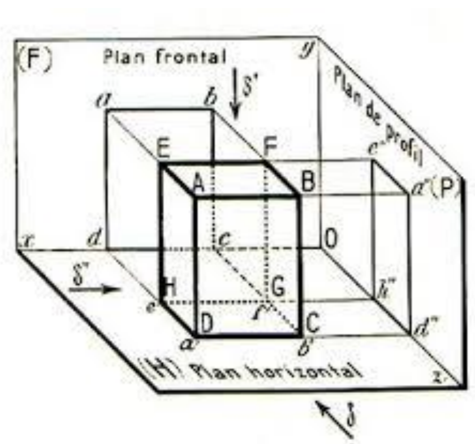
D'autres projections, telles les **projections de développement**, subdivisées en **cylindriques**, **coniques**, **pseudo-cylindriques**, **pseudo-coniques** ; elles sont obtenues en développant la surface d'un **cylindre** ou d'un **cône**, considérés comme **tangents** au globe terrestre et sur lesquels ont été projetés tous les points de la zone que l'on veut représenter.



2- Projection d’un point :

La projection d’un point A1 sur un plan (P) est le pied de la perpendiculaire à droite du point. Les principaux plans de la projection sont : le **plan frontal** (**F**), le **plan horizontal** (**H**). Les principaux plans de la projection sont perpendiculaires **//**, interception de **deux droites** appelée **ligne de terre**.

Si les deux plans ne suffisent pas, on ’introduction un troisième **plan de profil** (**P**). Ces trois plans sont perpendiculaires deux-à-deux.



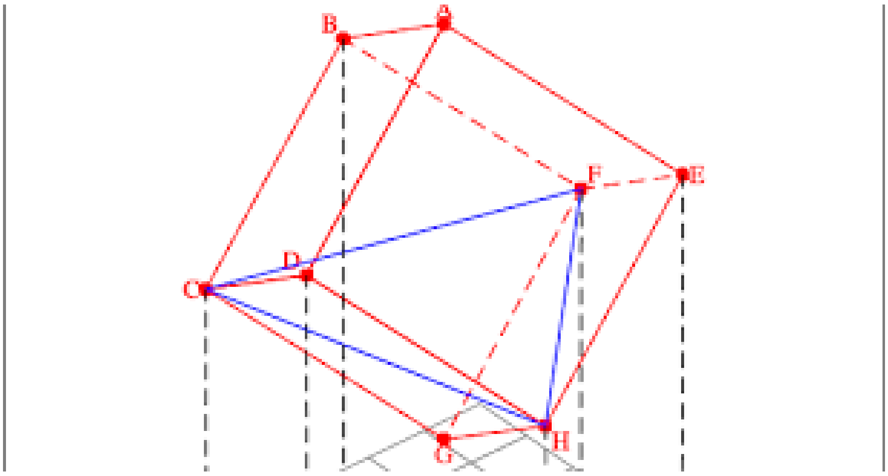
3- Projection des droites :

Pour projeter des droites, il suffit de les joindre. Il y a deux cas :

- Une droite **//** à un plan = une droite projetée en vraie grandeur.
- Une droite |┌ à un plan = une droite projetée à un point.

4- Projection d’un objet :

C’est une figure plane obtenue en projetant les sommets, les arrêts et les faces des solides sur un plan. Exemple, un cube qui a six phases sur lesquelles sont marquées des points. La vue étant, choisi toujours la somme des chiffres des phases opposées, fait 7 points. En intervenant, plaçons le dé à l’intérieur du cube de projection et projetons les six phases du dé sur un plan de projection.



IX- Vecteur :

1- Définition :

Notion ayant pour origine l'étude de certaines **grandeurs physiques**, comme la **vitesse**, les **forces**, etc., qui ne peuvent être décrites par un nombre unique, mais par un ensemble de deux ou plusieurs nombres.

Dans un sens plus général, le vecteur est défini **axiomatiquement** comme élément d'un **espace vectoriel**.

2- Typologie :

Un **vecteur libre** d'un **espace affine** est par définition un élément de l'espace vectoriel associé E. Un **champs de vecteurs** sur une partie A d'un espace affine est une application de v de A dans l'espace vectoriel associé E.

L'image v(x) du point x de A est souvent appelée **vecteur lié** au point x. dans espace vectoriel normé, on appelle **vecteur unitaire** tout vecteur de **norme** égale à 1.

Etant donné un vecteur v non nul, le vecteur v/||v|| est un vecteur unitaire colinéaire à v et de même sens.

Etant donné une droite vectorielle orientée, les composantes dans une base orthonormée qui la définit sont appelées les **cosinus directeurs** de la droite.

3- Définition des k-vecteurs :

Dans le produit tensoriel de k espaces égaux à un espace vectoriel E de dimension (n ≥ k), on définit, pour toute permutation Ơ de l'ensemble (1, …..,k), un **endomorphisme**, également noté Ơ, par :

Ơ(x_1Ø … Ø x_k) = $x_λ$1) Ø … Ø $x_λ$k)

et extension par linéarité à tout le produit tensoriel. Un **tenseur** t est dit antisymétrique si Ơ (t) = sgn (Ơ)t (sgn Ơ est la signature de la permutation Ơ).

L'ensemble des tenseurs d'ordre k antisymétrique est un espace vectoriel noté $\wedge^k$ (E). Ses éléments sont appelés des k-vecteurs sur E. On montre que $\wedge^{n-1}$ (E) est un espace vectoriel de dimension 1. En particulier, dans un espace vectoriel de dimension trois, l'espace $\wedge^2$ (E) est de dimension 1 ; ses éléments sont désignés en physique sous le nom de **vecteurs axiaux**.