LES LOGARITHMES

I- Généralité :

Le **logarithme** de base a est la **fonction** inverse de l'**exponentielle** de base a (c'est-à-dire de la fonction $y \dashrightarrow a^y$, $a > 0$). Autrement dit, le logarithme de base a du nombre positif x est l'**exposant** y qu'il faut mettre à la base a pour obtenir x ; on écrit $y = \log_a x$, ce qui équivaut à $y = a^y$. Il en résulte que les propriétés des logarithmes « reflètent » celle des **puissances**. Elles sont données par les formules :

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$,

$\log_a x^n = n \log_a x$,

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$,

$\log_a x^{1/n} = (1/n) \log_a x$.

Dans de nombreuses questions, on prend pour base le nombre d'**Euler,** $e = 2{,}718\,28 \ldots$ auquel correspondent les **logarithmes népériens** que l'on note Log ou ln. Etant donné le logarithme d'un nombre dans une base a, le logarithme du même nombre dans une base b est donné par la formule $\log_b x = \log_a x / \log_a b$.

Dans le cas des **logarithmes décimaux** (c'est-à-dire de base $a = 10$), désignés généralement par log, on appelle **caractéristique** le plus grand entier relatif qui ne le dépasse pas, **mantisse** la différence entre le logarithme et sa caractéristique. Si, dans le développement décimal du nombre dont on veut calculer le logarithme, on déplace la virgule, on en altère la caractéristique mais non la mantisse.

La détermination de la caractéristique est immédiate (si $x \geq 1$, c'est le nombre de chiffres de la partie entière diminué d'un ; si $x < 1$, c'est l'opposé du nombre de zéros qui précèdent le premier chiffre non nul, y compris celui qui se trouve avant la virgule), tandis que pour déterminer la mantisse, il faut recourir aux **tables de logarithmes**.

Le logarithme népérien d'un nombre complexe est l'un quelconque des nombres complexes w tel que $e^w = z$. Il existe donc une infinité de déterminations du logarithme d'un nombre complexe. Elles sont données par $w = \ln |z| + i\,(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)$ où $\mathrm{Arg}\, z$ est la détermination principale de l'argument de z et k un entier relatif.

On appelle **logarithme principal** celui qui a pour partie imaginaire la détermination principale de l'argument. On écrit $\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z$. Si z est un nombre réel positif, $\mathrm{Ln}\, z = \ln z$; si z est un nombre réel négatif, $\mathrm{Ln}\, z = |z| + i\pi$.