LES GRANDEURS

I- Généralité :

Si un automobiliste parcourt 720 kilomètres en 6 heures, sa vitesse moyenne est égale à 120 kilomètres par heure (720 ÷ 6 = 120).

La longueur du trajet (720 km) et la durée du parcours (6 h) sont des **grandeurs simples**.

La vitesse moyenne de l'automobiliste (120 km/h) est une **grandeur composée** ; il s'agit plus précisément d'une **grandeur quotient**.

Comment utilise-t-on les grandeurs produits et les grandeurs quotients ?

1- Grandeurs produits :

Les **grandeurs produits** sont des produits de grandeurs simples. L'unité de la grandeur produit dépend des unités dans lesquelles sont exprimées ces grandeurs simples.

On veillera à avoir toujours des unités correspondantes, comme le montrent les exemples suivants.

A- Aires et volumes :

Les **aires** et les **volumes** sont des grandeurs produits : une aire est le produit de deux longueurs (exprimées dans la même unité), et un volume est le produit de trois longueurs (exprimées dans la même unité).

Agrandissements et **réductions** sont couramment utilisés dans de nombreuses disciplines, par exemple : les agrandissements sont utilisés en **biologie** pour représenter des **micro-organismes** ; les réductions sont utilisées en **géographie** pour établir des **cartes**.

Comment agissent une réduction ou un agrandissement sur l'aire ou le volume d'un objet ?

1- Définition :

Si on multiplie toutes les dimensions d'un objet par un nombre *k* strictement positif, on dit qu'on a effectué :

- **agrandissement** de rapport *k* si $k > 1$;

- **réduction** de rapport *k* si $k < 1$.

Exemple : un modèle réduit à l'échelle d'une voiture est une réduction de rapport de cette voiture.

***Remarque* :** si une figure *F* est une réduction de rapport *k* d'une figure *F'*, alors la figure *F'* est un agrandissement de rapport de la figure *F*.

2- Propriétés :

- En agrandissant ou en réduisant une figure ou un objet, on obtient une figure ou un objet de **même nature géométrique**.

Ainsi, en réduisant ou en agrandissant un carré, on obtient un carré. En réduisant ou en agrandissant un cylindre de révolution, on obtient un cylindre de révolution.

- Dans un agrandissement ou une réduction de rapport *k* : l'aire d'une surface est multipliée par k^2 ; le volume d'un solide est multiplié par k^3.

La petite pyramide ainsi obtenue a un volume de 18 cm^3. On veut calculer le volume de la pyramide de départ.

***Résolution* :**

On sait qu'en coupant une pyramide par un plan parallèle à sa base, on obtient une petite pyramide qui est une réduction de la grande ; calculons le rapport de réduction.

La grande pyramide est donc un agrandissement de la petite de rapport 3.
Par suite, le volume de la grande pyramide est égal à : $18 \times 3^3 = 18 \times 27$, soit **486 cm^3**.

***Énoncé* :**

On augmente le rayon d'une sphère de 10 % ; la sphère ainsi obtenue est un agrandissement de la sphère initiale.

Quel est le pourcentage d'augmentation de l'aire de la sphère au cours de cet agrandissement ?

***Résolution* :** Appelons *r* le rayon de la petite sphère et *R* celui de la grande.

On a : soit $R = 1{,}1 \times r$; autrement dit, le rapport d'agrandissement est égal à 1,1.
L'aire de la sphère est donc multipliée par $(1{,}1)^2$, soit 1,21.

Appelons a l'aire de la petite sphère et A celle de la grande, on a donc : $A = 1{,}21a$, soit :
L'aire de la sphère a donc augmenté de **21 %**.

***Exemple* 1 :** on veut calculer la hauteur d'une pyramide dont le volume est égal à 500 cm^3 et dont l'aire de la base est 2 dm^2.
Le volume d'une pyramide est donné par la formule, où B et h désignent respectivement l'aire de la base et la hauteur de la pyramide, exprimées dans des unités correspondantes.

On peut convertir l'aire B en cm^2, soit 2 dm^2 = 200 cm^2.

La hauteur de la pyramide est donc égale à **7,5 cm**.

B- Énergie électrique :

La puissance d'un appareil électrique s'exprime en watts (W) ou en kilowatts (kW) ; on a :
1 kW = 1 000 W.

Si on utilise un appareil électrique dont la puissance est égale à P pendant une durée t, la formule permettant de calculer l'énergie E consommée par cet appareil est : $E = P \times t$.

L'énergie se mesure donc par une grandeur produit. L'unité de mesure de E dépend des unités choisies pour exprimer P et t.

L'unité d'énergie la plus couramment utilisée est le **kilowattheure** (symbole kWh) : le compteur électrique d'une habitation utilise cette unité pour mesurer l'énergie qui y est consommée.

Pour que E soit exprimée en kilowattheures, il faut que P soit exprimée en kilowatts et t en heures.

***Exemple* 2 :**

On utilise un fer à repasser d'une puissance de 1 500 W pendant deux heures.

On veut comparer l'énergie ainsi consommée avec celle que consommeraient 7 ampoules de 75 W allumées pendant 5 heures. Ces énergies seront exprimées en kilowattheures.

La puissance du fer à repasser est égale à 1 500 W, soit 1,5 kW. L'énergie consommée par le fer à repasser est donc : $E_1 = 1{,}5 \times 2$, soit **3 kWh**.

La puissance d'une ampoule est égale à 75 W, soit 0,075 kW. L'énergie consommée par les 7 ampoules est donc : $E_2 = 7 \times (0{,}075 \times 5)$, soit **2,625 kWh**.

L'utilisation de ce fer pendant 2 heures consomme donc plus d'énergie que les 7 ampoules restant allumées pendant 5 heures.

C- Transport de marchandises :

Pour mesurer le trafic d'une ligne de transport de marchandises, on utilise une grandeur produit : masse transportée × longueur du trajet.

***Exemple* 3 :**

Calculer le trafic d'un camion qui transporte 3 400 kg de marchandises sur 850 km.

Le résultat sera exprimé en tonnes-kilomètre (symbole : t. km).

On convertit la masse transportée en tonnes : 3 400 kg = 3,4 t.

Le trafic est donc égal à : 3,4 × 850, soit 2 890 t. km.

2- Grandeurs quotients :

Les grandeurs quotients sont des quotients de grandeurs simples.

L'unité de la grandeur quotient dépend des unités dans lesquelles sont exprimées ces grandeurs simples.

On veillera à avoir toujours des unités correspondantes, comme le montrent les exemples suivants.

A- Vitesse :

Rappelons la formule : où la vitesse v, la distance parcourue d et la durée du parcours t sont exprimés dans des unités correspondantes.

***Exemple* 4 :**

On veut calculer la vitesse moyenne d'un sprinter qui court le 100 mètres en 10 secondes ; cette vitesse sera exprimée en m/s, puis en km/h.

d = 100 m et t = 10 s, donc la vitesse moyenne du sprinter en m/s est égale à 100 ÷ 10, soit **10 m/s**.

La vitesse exprimée en km/h représente la distance qui serait parcourue par le sprinter en une heure : nous venons de voir qu'en une seconde il parcourt 10 m, donc, en une heure, il parcourrait 3 600 × 10 (car 1 h = 3 600 s), soit 36 000 m.

Or 36 000 m = 36 km.

La vitesse moyenne du sprinter est donc égale à **36 km/h.**

Remarque : les unités de grandeurs quotients peuvent aussi se noter à l'aide d'exposants. Par exemple km/h se note aussi km. h^{-1}.

B- Débit :

Si on ouvre un robinet et si on laisse couler l'eau, le débit *d* de ce robinet est donné par la formule : où *v* désigne le volume d'eau écoulé et *t* le temps d'écoulement ; *d*, *v* et *t* doivent être exprimés dans des unités correspondantes : si le volume est en litres et le temps en minutes, le débit sera exprimé en L/min.

***Exemple* 5 :**

On veut calculer le temps nécessaire, en **heures** et **minutes**, pour remplir une baignoire de 300 litres si le débit du robinet de cette baignoire est 4 L/min.
D'après la formule l /t , on a : 75 min.

Or 75 min = 1 h 15 min, donc le robinet remplit la baignoire en **1 h 15 min**.