LA GEOMETRIE

I- Généralité :

Partie des **mathématiques** qui étudie l'**espace** et les **figures** de l'espace.

Dans son acception la plus ancienne, la géométrie prend ses racines dans un ensemble de postulats concernant des notions primitives (les **points**, les **droites**, les **plans**) qui sont des abstractions de réalités matérielles, faisant l'objet de l'expérience quotidienne, et situées dans le plan ou l'espace habituel.

Dans un sens plus large, la géométrie est une **science hypothético-déductive**, dans le cadre de laquelle on peut choisir avec une certaine liberté les principes fondamentaux.

En harmonie avec la tendance des mathématiques modernes à l'**axiomatisation** et à l'**abstraction**, les **« concepts géométriques »** sont considérés non comme inspirés par une réalité **empirique**, mais comme des entités **abstraites**, , caractérisées par certaines propriétés qui sont postulées peu à peu et qui peuvent être définies indépendamment de l'intuition commune.

De façon abstraite, une géométrie est définie par la **donnée** d'un ensemble **S** (espace de la géométrie) et d'un groupe **G** de transformation de **S** (groupe fondamental de la géométrie).

Un même espace peut être le cadre de géométries différentes. Par exemple : si **S** est formé par les **3-uples ordonnés** de nombres réels (non tous nuls), définis modulo un facteur de proportionnalité et, si **G** est le **groupe des applications projectives**, on a la géométrie projective.

Dans l'espace ordinaire, si **G** est le **groupe des transformations affines**, on a la géométrie affine. Si **G** est le **groupe des similitudes**, on a la géométrie élémentaire, etc.

Une géométrie a pour objet l'étude des figures (sous-ensembles) de l'espace modulo, les transformations du groupe fondamental. Par exemple : la distinction entre coniques dégénérées et non dégénérées appartient à la géométrie projective ; la distinction entre **ellipses**, **hyperboles** et **paraboles** appartient à la géométrie affine ; la notion d'**axe** à la géométrie élémentaire.

II- Géométrie analytique :

La géométrie analytique est une méthode permettant de traduire systématiquement les problèmes géométriques en problèmes analytiques et vis versa, afin d'utiliser pour leur résolution, soit les ressources de la géométrie, soit celles de l'analyse.

Ce but est atteint par l'introduction de **coordonnées**, c'est-à-dire par un procédé permettant d'établir une correspondance entre les points d'une droite, d'un plan ou de l'espace usuel et, respectivement, les nombres réels, les couples ordonnés ou les 3-uples ordonnés de nombres réels.

Une fois dans un système de coordonnées, on peut transformer le problème géométrique en problème analytique dont l'étude permet d'obtenir des résultats analytiques qui seront ensuite interprétés géométriquement.

C'est ainsi que le problème de la détermination du point commun à deux droites du plan peut être ramené à la résolution d'un système de deux **équations algébriques linéaires à deux inconnues**, dont la solution donne les coordonnées du point comme vis versa.

III- Géométrie descriptive :

Partie de la géométrie qui étudie les méthodes permettant de représenter sur un plan les objets de l'espace.

Les principales méthodes sont les suivantes : **projection orthogonales**, **projections cotées**, **projections stéréographiques**.

En pratique, il convient de considérer les trois méthodes séparément. Elles sont pourtant intimement liées, car fondées sur une série d'opérations caractéristiques de la géométrie élémentaire : **projections**, **sections**, **rabattements**.

Les méthodes de la géométrie descriptive permettent ainsi de résoudre les problèmes de représentation des **ombres**.

Dans la méthode des deux projections orthogonales, aussi appelée **méthode de Monge**, on fixe deux plans perpendiculaires entre eux (**plan horizontal de projection** et le **plan frontal de projection**), qui se coupent suivant une droite appelée **ligne de terre**.

Pour représenter une figure quelconque dans le plan de l'épure supposé coïncider avec le plan horizontal, on rabat le plan frontal autour de la ligne de terre.

Dans certains cas particuliers, on étudie un troisième plan (**plan de profit**) perpendiculaire aux deux premiers.

Les figures géométriques sont représentées au moyen des projections orthogonales de leurs points (par exemple : un cube est représenté en projetant ses huit sommets). Une droite peut être représentée en projetant deux de ses points ou au moyen des projections de deux plans qui la contiennent, l'un perpendiculaire au plan horizontal, l'autre perpendiculaire au plan frontal.

Un plan est représenté par ses deux sections (**traces**) avec le plan horizontal et le plan frontal (dans le cas d'un plan contenant la ligne de terre, on a recours à la trace sur le plan de profil).

Alors que la méthode des deux projections orthogonales est particulièrement adaptée à la représentation d'objets ayant des dimensions spatiales du même ordre de grandeur (édifices et objets de l'industrie), la géométrie cotée est adaptée à la représentation de figures dont une dimension est inférieure aux deux autres.

Elle pour origine des études de type topographique, et est un mélange de représentations projectives et analytiques.

En géométrie cotée, un point **P** par sa projection orthogonale **P1** sur un plan dit plan de comparaison et par sa cote, nombre écrit à côté de **P1**. Une droite **D** est représentée par sa projection orthogonale D1 dans le plan de la comparaison et par la cote de deux de ses points (écrite à côté de leur projection).

Un plan est représenté au moyen de son intersection (trace) et d'une ligne de pente sur laquelle est indiquée la cote du point situé à une distance du plan de comparaison égale à un (dans l'unité de mesure choisie). Pour la représentation d'objets de forme quelconque (par exemple : les reliefs sur une carte topographique), on utilise les courbes de niveau, c'est-à-dire les courbes d'intersections de ces objets avec des plans parallèles au plan de comparaison et à des distances de 1, 2, 3, etc.

Dans la méthode de la projection stéréographique à partir d'un point **0** (centre de projection) extérieur à un plan, dit plan de projection, on trace les droites (**rayons**) passant par les figures à représenter. Leur intersection avec le plan de projection constitue l'image des oints. Puisque les points à représenter situés sur le même rayon ont ma même image, celle-ci ne suffit pas à définir un point. C'est pourquoi on indique sur l'épure le point **O0** (projection orthogonale de O sur le plan de projection) et un cercle de distance de rayon égal à la distance **O0O**.

Droites et plans constituant les figures sont ensuite représentés par leurs traces (points ou droites, intersections effectives avec le plan de projection) et les éléments (points ou droites) de fuite déterminés par les droites ou des plans passant par **O** et parallèles aux droites ou aux plans donnés. Ce type de projection est très étroitement lié à la **prospective** et au **dessin**.

IV- Géométrie différentielle :

Elle étudie des structures qu'on peut définir sur les variétés différentielles. Ces structures peuvent être étudiées au voisinage d'un point (**géométrie différentielle locale**). On peut aussi étudier la manière dont les propriétés locales peuvent être liées entre elles pour donner des propriétés globales (**géométrie différentielle globale**).

L'étude des courbes et des surfaces par les méthodes du calcul différentiel classique entrent dans le cadre de la géométrie différentielle. L'analyse sur les variétés ne doit faire intervenir que des propriétés intrinsèques (c'est-à-dire indépendantes de tout système de repérage des points). Par exemple : on peut utiliser le **calcul tensoriel**, qui généralise les procédés habituels du calcul différentiel, de façon à les rendre indépendants du système de variables utilisé.