LA FRACTION

I- Généralité :

Quand on voit $\frac{8}{3}$ (lire huit tiers ou bien huit sur trois), **que voit-on ? Un quotient ? Une écriture fractionnaire ? Une fraction ?** Peut-être les trois à la fois…

1- Quotients :

Le quotient de la division de 8 par 3 ne peut pas s'écrire sous forme décimale puisque la division de 8 par 3 ne tombe pas juste $8 \div 3 = 2{,}66$, il reste 2.

Ce quotient existe pourtant bel et bien : c'est le nombre qui, multiplié par 3, est égal à 8.

Plus généralement, a et b étant deux nombres et b étant différent de 0, le quotient de la division de a par b est **le nombre obtenu en divisant *a* par *b***.

C'est donc le nombre qui, multiplié par b, est égal à a. Pour présenter ce nombre, on utilise une écriture fractionnaire.

2- Fractions :

Pour présenter le quotient de 8 par 3, on utilise la fraction $\frac{8}{3}$ (lire huit tiers ou huit sur trois).

Plus généralement, une fraction est **une écriture d'un nombre** sous la forme $\frac{a}{b}$ ou a/b, où a est un entier naturel et b, un entier naturel non nul.

Remarques :

Au sens strict, une fraction est donc une écriture qui représente un nombre ; elle n'est pas un nombre. Quand on dit : « j'additionne des fractions », on devrait dire : « j'additionne les nombres représentés par des fractions ».
Il est courant d'étendre la définition donnée au cas où le numérateur est un entier relatif ; ainsi $\frac{-8}{3}$ est considérée comme une fraction.

3- Écritures fractionnaires :

Une écriture fractionnaire d'un nombre est une écriture de ce nombre sous la forme $\frac{x}{y}$ (lire *x* sur *y*), où *x* représente un nombre et *y* représente un nombre différent de zéro.

Remarques :

Toute fraction est une écriture fractionnaire particulière.

Revenons à la question posée en introduction : lorsqu'on voit $\frac{8}{3}$, on voit une fraction. On peut dire également que l'on voit une écriture fractionnaire. Si l'on dit que l'on « voit » un **quotient** (c'est-à-dire un nombre) on commet un abus de langage ; mais cet abus, pour des raisons de commodité, est couramment pratiqué.

II- Méthode générale :

Lorsque l'on dit qu'un coureur a manqué la première place d'une course « pour une fraction de seconde », cela signifie qu'il lui a manqué quelques dixièmes, voire quelques centièmes de secondes pour être premier.

En **mathématiques**, prendre une fraction d'un nombre ou d'une quantité a un sens très précis.

Lequel ?

Exemple :

Dans une assemblée de 120 personnes, les trois quarts portent un pantalon. Pour trouver le nombre de personnes portant un pantalon, il suffit de savoir comment calculer les trois quarts de 120.

Trois quarts équivalent à trois fois un quart ($\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$).

Si l'on sait prendre un quart de 120, on saura donc prendre trois quarts de 120 en multipliant par 3.

Comme un quart de 120 équivaut à $120 \div 4 = \frac{120}{4}$, prendre les trois quarts de 120 revient à

Calculer $3 \times \frac{120}{3}$.

Puisque $\frac{120}{4} = 3$, on trouve $3 \times \frac{120}{4} = 90$.

Il y a donc 90 personnes qui portent un pantalon dans cette assemblée.

Remarque :

$$\frac{3 \times 120}{4} = \frac{360}{4} = 90 \text{ ; on en déduit que } 3 \times \frac{120}{4} = \frac{3 \times 120}{4}.$$

1- Généralisation :

On vient de voir que trois quarts de 120 équivalent à $3 \times \frac{120}{4}$ et que $\frac{3 \times 120}{4}$. On donne ainsi un sens au produit $\frac{3}{4} \times 120$, ce qui signifie « les trois quarts de 120 ». Plus généralement, et étant donné un nombre *n*, trois quarts de ce nombre *n* est égal à : $\frac{3}{4} \times n = 3 \times \frac{n}{4} = \frac{3 \times n}{4}$.

On peut encore généraliser et remplacer la fraction $\frac{3}{4}$ par n'importe quelle autre fraction.

Ainsi, si on considère une fraction notée $\frac{a}{B}$, avec $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ de *n* est égal à : $a \times \frac{n}{b} = \frac{a \times n}{b}$.

2- Cas particulier :

Soit *a* un entier naturel. Si l'on veut prendre une fraction $\frac{\mathbf{a}}{10}$, $\frac{\mathbf{a}}{100}$ ou $\frac{\mathbf{a}}{1000}$ d'un nombre, il suffit de le multiplier par *a*, puis de déplacer la virgule du résultat obtenu respectivement d'un, deux ou trois rangs vers la gauche.

Par exemple, $\frac{37}{100}$ de 12 (lire « trente-sept centièmes de douze ») est égal à 4,44 car $37 \times 12 = 444$.

De même, $\frac{23}{10}$ de 5,4 (lire « vingt-trois dixièmes de cinq virgule quatre ») est égal à 12,42 car

$23 \times 5,4 = 124,2$.

III- Reconnaissance :

On veut répartir équitablement les 36 billes d'un paquet entre 4 personnes et les 27 billes d'un autre paquet entre 3 personnes. Il est facile de voir que dans les deux répartitions, chaque personne

recevra 9 billes ; en effet $\frac{36}{4} = 9$ et $\frac{27}{3} = 9$. Les deux fractions $\frac{36}{4}$ et $\frac{27}{3}$ représentent le même

nombre : on dit qu'elles sont égales. On peut s'en apercevoir en effectuant les divisions $36 \div 4$ et $27 \div 3$.

- En utilisant une calculatrice :

Si l'on dispose d'une calculatrice (celle d'un ordinateur, par exemple), il est facile de savoir si deux fractions sont égales : on effectue les quotients qu'elles représentent.

Par exemple, les fractions $\frac{102}{6}$ et $\frac{119}{7}$ sont égales car on a : $102 \div 6 = 17$ et $119 \div 7 = 17$.

- Sans utiliser de calculatrice :

Dans ce cas, reconnaître deux fractions égales suppose que l'on sache écrire une fraction égale à une fraction donnée.

On utilise alors la **règle** suivante : une fraction étant donnée, pour obtenir une fraction qui lui est égale, il suffit de multiplier ou de diviser son numérateur et son dénominateur par un même entier naturel différent de 0.

Par exemple, les fractions $\frac{15}{20}$ et $\frac{21}{28}$ sont égales car on a : $\frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$ et $\frac{21}{28} = \frac{21 \div 7}{28 \div 7} = \frac{3}{4}$.

1- Ecrire des fractions égales :

Écrire des fractions égales peut être nécessaire lorsqu'on doit effectuer **des additions ou des soustractions avec des fractions décimales.**

On utilise alors la règle déjà citée, dans le cas simple où les dénominateurs des fractions sont 10, 100 ou 1 000.

Par exemple, si l'on veut écrire le résultat de l'addition $3 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100}$ sous la forme d'une fraction décimale, il suffit d'écrire : $3 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} = \frac{3 \times 100}{100} + \frac{5 \times 10}{10 \times 10} + \frac{9}{100} = \frac{300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{9}{100} = \frac{359}{100}$.

.

IV- Addition et soustraction :

Lorsqu'on veut effectuer l'addition ou la soustraction de nombres relatifs en écriture fractionnaire, on distingue deux cas : soit les écritures fractionnaires ont le même dénominateur, soit elles ont des dénominateurs différents.

1- Cas où le dénominateur est le même :

Sur la **figure 1**, on voit que les $\frac{3}{7}$ (lire *trois-septièmes)* du disque sont coloriés en rouge et les $\frac{2}{7}$ en vert.

On peut dire, sans préciser les couleurs, que les $\frac{5}{7}$ du disque sont coloriés.

On écrit : $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

***Règle* :**

- Pour additionner deux nombres dont les écritures fractionnaires ont le même dénominateur :
on conserve le dénominateur commun ;
on additionne les numérateurs.

- Pour soustraire deux nombres dont les écritures fractionnaires ont le même dénominateur :
on conserve le dénominateur commun ;
on soustrait les numérateurs.

Autrement dit, avec des lettres (*a*, *b* et *d* représentant des entiers relatifs ; *d* ‡ 0) : $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a + b}{d}$ et

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}.$$

Exemples :

$$\frac{5}{13} + \frac{4}{13} = \frac{5+4}{13} = \frac{9}{13}.$$

$$\frac{7}{21} - \frac{11}{21} = \frac{7-11}{21} = \frac{-4}{21}$$ (ce qui s'écrit aussi $-\frac{4}{21}$).

$$\frac{127}{91} + \frac{-41}{91} - \frac{23}{91} = \frac{127+(-41)-23}{91} = \frac{63}{91}.$$

2- Cas où les dénominateurs sont différents :

***Règle* :**

On ne change pas la valeur d'un quotient si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre différent de zéro.

Autrement dit, avec des lettres (a ; c et k représentant des nombres ; $c \neq 0$ et $k \neq 0$) : $\frac{a}{c} = \frac{ka}{kc}$

***Exemples* :**

$$\frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3}$$ et notamment : $5 = \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{3} = \frac{8 \times 5}{8} = \frac{17 \times 5}{17}$.

- Additionner ou soustraire :

***Règle* :**

Pour additionner (ou soustraire) des nombres qui n'ont pas le même dénominateur, on les remplace d'abord par des quotients ayant le même dénominateur (et représentant les mêmes nombres), puis on applique la règle énoncée dans la partie 1.

***Exemples* :**

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{12}{20} - \frac{13}{20} = \frac{-1}{20}$$

$$2 + \frac{3}{8} = \frac{2}{1} + \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{1 \times 8} + \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{1 \times 8} + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = \frac{16 + 3}{8} = \frac{19}{3}.$$

***Cas particuliers* :**

Si les dénominateurs sont des puissances de 10 (1 ; 10 ; 100 ;…), il est possible d'écrire d'abord les nombres sous forme décimale avant de les additionner ou de les soustraire.

$$\frac{3}{10} + \frac{27}{100} - \frac{7}{1000} = 0,3 + 1,27 – 0,007 = 1,563.$$

Si la somme comporte des nombres écrits sous forme décimale, on transforme ces écritures en écritures fractionnaires dont les dénominateurs sont des puissances de 10.

$$2,37 + \frac{13}{3} = \frac{2,37 \times 100}{100} + \frac{13}{3} = \frac{2,37 \times 3}{100 \times 3} + \frac{13 \times 100}{3 \times 100} = \frac{711}{300} + \frac{1\,300}{300} = \frac{411 + 1\,300}{300} = \frac{2011}{300}.$$

V- Réduction :

Pour offrir un bracelet à leur mère, Jacques donne à son père les $\frac{3}{35}$ du prix du cadeau et Sophie donne les $\frac{4}{45}$. **De Jacques et de Sophie, qui a donné le plus ?**

À l'aide d'une calculatrice, on voit que : $\frac{3}{35} \approx 0,086$ et $\frac{4}{45} \approx 0,089$. C'est donc Sophie qui a donné le plus.

Existe-t-il une autre méthode pour résoudre ce type de problème ?

1- **La méthode :**

Règle :

On ne change pas la valeur d'un quotient si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un **même nombre** différent de zéro.

Autrement dit, avec des lettres (a ; c et k représentant des nombres ; $c \neq 0$ et $k \neq 0$) : $\frac{a}{c} = \frac{ka}{kc}$

***Exemples* :** $\frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3}$ et notamment : $5 = \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{3} = \frac{9 \times 5}{9} = \frac{17 \times 5}{17}$

***Exemple 1* :** on veut écrire au même dénominateur les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{30}$.

On remarque que 30 est un multiple de 5 ($30 = 5 \times 6$). D'où $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}$

$\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{30}$ représentent les mêmes nombres que $\frac{18}{30}$ et $\frac{7}{30}$.

On dit qu'on a réduit ces deux écritures fractionnaires au même dénominateur.

***Exemple 2* :**

On réduit maintenant au même dénominateur $\frac{\mathbf{3}}{12}$ et $\frac{\mathbf{7}}{20}$. Ce n'est pas aussi simple que dans le cas précédent. Les multiples vont faire la course.

Dans le tableau qui suit, on écrit dans la ligne du haut les premiers multiples de 12 et dans la ligne du bas les premiers multiples de 20 jusqu'à ce qu'on ait le même nombre, ici : **60**.

12	24	36	48	60
20	40	60		

60 est à la fois un multiple de 12 ($60 = \mathbf{5} \times 12$) et de 20 ($60 = 20 \times \mathbf{3}$). On choisit donc ce nombre 60 pour réduire $\frac{3}{12}$ et $\frac{7}{20}$ au même dénominateur.

$$\frac{3}{12} = \frac{3 \times 5}{12 \times 5} = \frac{15}{60} \text{ et } \frac{7}{20} = \frac{7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{21}{60}$$

On a réduit $\frac{3}{12}$ et $\frac{7}{20}$ au même dénominateur.

***Remarque* :**

60 est le plus petit multiple commun non nul de 12 et de 20. On écrit ppcm (12 ; 20) = 60.

***Exemple 3* :** réduction au même dénominateur de $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{21}$ et $\frac{7}{6}$.

On va utiliser la même méthode mais cette fois avec trois lignes dans le tableau.

6	12	18	24	30	36	42
14	28	42				
21	42					

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on choisit 42 comme dénominateur commun. On trouve alors :

$$\frac{5}{14} = \frac{5 \times 3}{14 \times 3} = \frac{15}{42} ; \frac{4}{21} = \frac{4 \times 2}{21 \times 2} = \frac{8}{42} ; \frac{7}{6} = \frac{7 \times 7}{6 \times 7} = \frac{49}{42}$$

On a réduit $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{21}$ et $\frac{7}{6}$ au même dénominateur.

***Remarque* :** 42 est le plus petit multiple commun non nul de 14, 21 et 6. Au lieu de faire la course aux multiples, on peut décomposer 14, 21 et 6.
$14 = 2 \times 7$; $21 = 3 \times 7$ et $6 = 2 \times 3$.
42, qui est égal à $2 \times 7 \times 3$ est un multiple non nul commun à 14, 21 et 6.

2- Applications :

Règle :

Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire, on peut les réduire au même dénominateur positif puis comparer les nouveaux numérateurs. Les deux nombres sont rangés dans le même ordre (que les nouveaux numérateurs).

Exemple 1 **:** on veut comparer $\frac{10}{21}$ et $\frac{-9}{7}$.

Une méthode consiste à réduire au même dénominateur. On peut remarquer que $105 = 21 \times 5$ et $105 = 35 \times 3$. On a donc : $\frac{10}{21} = \frac{10 \times 5}{21 \times 5} = \frac{50}{105}$ et $\frac{16}{35} = \frac{16 \times 3}{35 \times 3} = \frac{48}{105}$.

$\frac{50}{105}$ et $\frac{48}{105}$ ont le même dénominateur positif ; comparons les numérateurs : $50 > 48$ donc : $\frac{50}{105} > \frac{48}{105}$.

Finalement, $\frac{10}{21} > \frac{16}{35}$.

Exemple 2 **:** comparaison de $\frac{5}{2}$ et $\frac{-5}{7}$.

On commence par rendre positif le dénominateur du deuxième nombre : $\frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$.

Puis on réduit au même dénominateur. On trouve : $70 = 10 \times 7$ et $70 = 7 \times 10$. D'où $\frac{-7}{10} = \frac{-7 \times 7}{10 \times 7} = \frac{49}{70}$ et $\frac{5 \times 10}{7 \times 10} = \frac{-50}{70}$.

$-49 > -50$ donc $\frac{-49}{70} > \frac{-50}{70}$ et finalement : $\frac{5}{2} > \frac{5}{-7}$.

On veut calculer $\frac{4}{15} - \frac{7}{6} + \frac{11}{20}$.

60 est un multiple commun à 15, 6 et 20 donc $\frac{4}{15} - \frac{7}{6} + \frac{11}{20} = \frac{4 \times 4}{15 \times 4} - \frac{7 \times 10}{6 \times 10} + \frac{11 \times 3}{20 \times 3} = \frac{16}{60} - \frac{70}{60} + \frac{33}{60} = \frac{21}{60}$.

$\frac{21}{60}$ peut se simplifier par 3 : $\frac{21}{60} = \frac{21 \div 3}{60 \div 3} = \frac{7}{20}$.

Finalement : $\dfrac{4}{15} - \dfrac{7}{6} + \dfrac{11}{20} = \dfrac{7}{20}$.