LES DROITES

I- Droites :

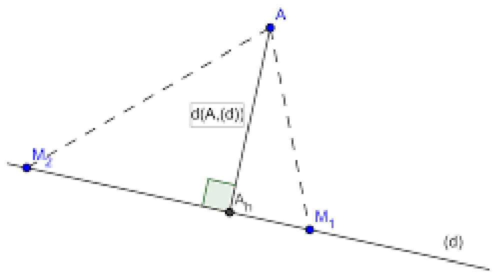
1- Définition :

Dans un plan euclidien, les droites sont des ensembles de points dont les coordonnées cartésiennes satisfont une équation du type : $ax + by + c = 0$, (a, b non simultanément nuls) qui, si $b \ddagger 0$, peut s'écrire sous la formule réduite $y = mx + n$ où m est le **coefficient angulaire** (ou **pente**), n l'**ordonnée à l'origine**.

Si $abc \ddagger 0$, on peut mettre l'équation sous la forme $x/p + y/q = 1$ où (p, 0) et (0, q) sont les points communs à la droite et aux axes de coordonnées.

On appelle **droite projective** l'**espace projectif** de dimension 1. Dans le plan projectif, on dit que deux droites parallèles ont le même point à l'infini. L'ensemble de tous les points à l'infini des droites du plan constitue la **droite de l'infini** qui, en coordonnées cartésiennes homogènes, a pour équation $x_0 = 0$.

Dans l'espace euclidien de dimension 3, une droite non parallèle aux axes peut être représentée par une équation de type :
$(x-a_1)/m = (y-a_2)/n = (z-a_3)/p$.

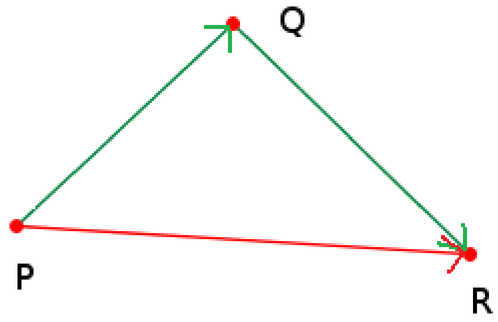


Si le repère est **orthonormé**, les nombres m, n, p sont proportionnels aux **cosinus** directeurs de la droite, c'est-à-dire aux cosinus des **angles** qu'elle forme avec les axes de coordonnées. Deux droites peuvent être **coplanaires** (appartenant à un même plan) ou non coplanaires (non contenues dans un même plan).

Par rapport à un plan, une droite peut être **parallèle** (elle n'a aucun point en commun), **sécante** (elle a un seul point en commun) ou bien est dans le plan. Ensemble des **points équipotents** à **R**. A l'aide d'une **bijection** g, appelée parfois **graduation** de la droite **D** dans **R**, on peut ordonner **D** qui devient une droite orientée.

Si **M** est un point de D, xM = g (M) est dite l'**abscisse** de M relativement à la graduation **G** ; le point d'abscisse **0** est l'origine de la graduation. On le désigne souvent par la lettre **O**.

En algèbre, dans un espace vectoriel réel, une **droite vectorielle** est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, une droite vectorielle est un ensemble de **points** de type $x = tv$ où v est **vecteur** donné et t un **nombre réel** arbitraire.



Dans un espace affine E, l'ensemble des points de type $x = a + tv$ où a est un point donné, v un vecteur donné de l'espace vectoriel associé à E et t un nombre réel arbitraire est une droite affine ; on dit que la droite passe par le point a et admet v pour **vecteur directeur**.

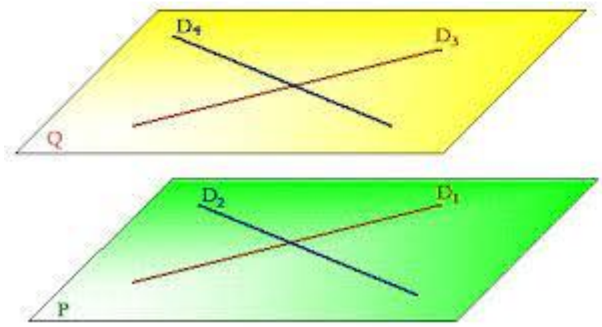
L'équation $x = a + tv$ est dite **équation paramétrique** de la droite. Pour tout couple (a, b) de points de E il passe une droite affine et une seule (a ‡ b) ; son équation est $x = a + t (b-a)$. Si on transporte l'ordre naturel des nombres réels sur l'ensemble des points de la droite par la bijection
t ------> a + tv (resp. t ----> a + t (b - a), on obtient une orientation de la droite : on dit que la droite est orientée par le vecteur v (resp de a vers b).

L'ensemble des points qui sont précédés par (resp qui précèdent) un point donné sur la droite est appelé **demi-droite positive** (resp négative) ayant ce point pour origine.

L'**ensemble des réels** est lui-même une droite appelée la **droite numérique**. Deux droites sont dites **sécantes** si elles ont un point commun, parallèles si elles sont des vecteurs directeurs colinéaires. On peut étendre la notion de droite aux espaces complexes, qu'ils soient vectoriels, affines ou projectifs.

2- Représentation graphique :

Pour se représenter une droite, on peut imaginer une corde tendue sur un mur ou un rayon de lumière. Une droite est une **ligne continue** dans une direction fixée, sans sauts ou interruptions, **sans début ni fin**, **formée par la succession d'une infinité de points alignés**.



Pour désigner une droite, on utilise généralement la lettre majuscule **D** (ou minuscule d), à laquelle on ajoute un numéro en indice (D_1, D_2, etc.) ou des accents en exposant (D', D'', etc.). Lorsqu'il y en a plusieurs. Une droite D est généralement notée entre parenthèses (D), pour éviter toute ambiguïté avec un éventuel point D. Par ailleurs, si une droite est définie par deux points A et B, la droite est notée (AB).

Si on choisit un point P sur une droite D, celle-ci est alors divisée en deux parties, ou **demi-droites**, que l'on va appeler D_1 et D_2. **Une demi-droite a un début, mais pas de fin**. Ici, c'est le point P que l'on appelle l'**origine** des deux **demi-droites**.

En choisissant deux points P et Q sur une droite, on la divise en trois parties : les deux demi-droites D_1 et D_2, et le segment [PQ]. Un segment est un tronçon de droite limité par deux points ; il est noté entre crochets : ainsi dans notre exemple, le segment formé par les points P et Q est noté [PQ]. **Un segment a donc un début et une fin**. Les points P et Q sont appelés les extrémités du segment. Le segment d'extrémités P et Q peut donc se noter de deux manières différentes : [PQ] et [QP].

Si on fixe un point et si on trace des droites qui passent par ce point, on s'aperçoit que l'on peut en tracer autant que l'on veut : **par un point passent une infinité de droites**.

Si on fixe deux points et si on essaye de tracer des droites qui passent par ces deux points, on voit qu'il n'y en a qu'une seule de possible : **par deux points passe une et une seule droite**.

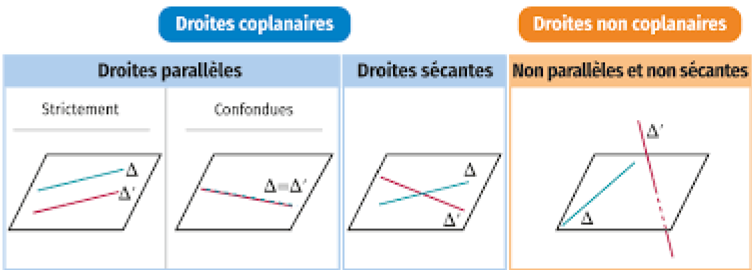
Si on fixe trois points non alignés et si on essaye de tracer une droite qui passe par ces trois points, on voit très vite que c'est impossible. En revanche, si les trois points sont alignés, il y a une droite, et une seule, qui les inclut tous.

3- Position de deux droites sur un Plan :

Si on trace deux droites sur une feuille de papier, elles peuvent être :

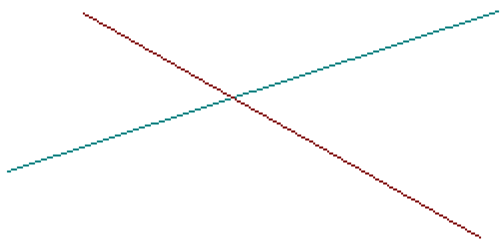
- **parallèles**, si elles ne se croisent jamais, peu importe jusqu'où on les prolonge ; elles n'ont

aucun point en commun. Deux droites parallèles ont la même direction ;



- **sécantes**, si elles se coupent à un endroit. Deux droites sécantes ont des directions

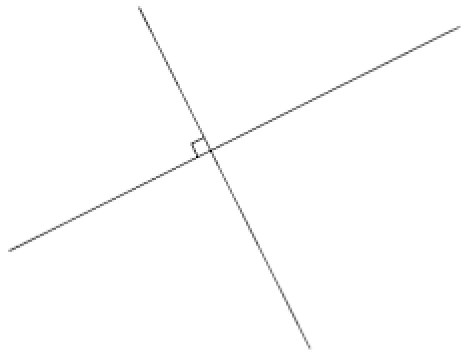
différentes ;



Deux droites sécantes

- **perpendiculaires**, si en plus d'être sécantes, elles se coupent en formant quatre angles droits

(à 90°). Deux droites perpendiculaires ont des directions différentes ;



Deux droites perpendiculaires

- **confondues**, si en plus d'être parallèles, elles ont tous leurs points en commun ; il s'agit alors

d'une seule et même droite.

Les exemples de droites parallèles sont nombreux : les **rails** de chemin de fer, les traces que laissent les pneus d'une voiture sur une route humide, les lignes d'une piste de l'épreuve du 100 m en **athlétisme**, etc.

L'exemple classique de droites sécantes, qui peuvent être perpendiculaires, est celui du carrefour de routes ou de rues dans une ville.

4- Droites parallèles et perpendiculaires :

Pour tracer des droites parallèles et perpendiculaires sur une feuille de papier, on utilise un outil nommé **équerre** ; il existe deux sortes d'équerre. La première sorte a une forme de triangle isocèle, ce qui veut dire que deux de ses côtés, ceux qui forment un angle droit, sont de même longueur. Ces deux côtés sont appelés les **cathètes** du triangle. La deuxième sorte d'équerre est un simple triangle rectangle : ses trois côtés ont tous des longueurs différentes, et deux de ses côtés (les cathètes) forment aussi un angle droit. Les équerres sont généralement faites de plastique transparent.

- Pour tracer une parallèle à une droite, on suit les étapes suivantes :

1- on aligne l'hypoténuse (côté le plus long, opposé à l'angle droit) de l'équerre isocèle avec la droite ;

2- on pose une règle (ou une autre équerre) le long d'une des cathètes de la première équerre ;

3-on fait glisser l'équerre isocèle le long de la règle (ou de l'autre équerre) jusqu'à arriver à la

position où l'on veut tracer la droite parallèle.

- Pour tracer maintenant des droites perpendiculaires à celles d'avant, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. sans déplacer la règle (ou l'équerre de gauche), on enlève l'équerre isocèle ;

2. on tourne l'équerre isocèle de manière à ce que ce soit l'autre cathète qui soit posée là où était la première au début, le long de la règle ;

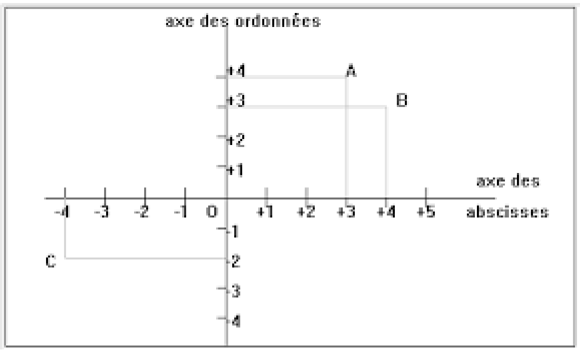
3. on glisse l'équerre isocèle le long de la règle (ou de l'autre équerre) jusqu'à ce que son hypoténuse arrive à l'endroit où l'on veut tracer la droite perpendiculaire.

Pour se représenter une droite, on peut imaginer une corde tendue sur un mur ou un rayon de lumière. Une droite est une **ligne continue** dans une direction fixée, sans sauts ou interruptions, **sans début ni fin**, **formée par la succession d'une infinité de points alignés**.

5- Abscisse et ordonnée :

Les **nombres relatifs** permettent de graduer complètement une **droite** (dans les deux sens, de part et d'autre du zéro).

Comment place-t-on sur une droite graduée un point d'abscisse donnée ?



a- Définition :

Un **axe** est une droite sur laquelle **un sens positif et un sens négatif** ont été définis et sur laquelle une **graduation régulière** a été tracée.

En général, le sens positif est le sens de parcours de la gauche vers la droite ou bien le sens de parcours du bas vers le haut (ces deux sens sont symbolisés par une flèche à l'extrémité de la droite).

Les traits de la graduation peuvent être espacés d'un écart quelconque, mais celui-ci doit être constant.

b- Abscisse :

L'**abscisse** (mot féminin) d'un point sur un axe est le nombre qui lui est associé ; ce nombre indique : le **nombre d'unités nécessaires** pour aller de l'origine au point considéré ; le sens dans lequel il faut se déplacer pour y aller.

Soit un axe sur lequel la graduation fait apparaître l'origine. Si l'on veut placer le point A d'abscisse - 3, il suffit de compter trois graduations vers la gauche en partant de 0 puisque, dans le cas présent, l'écart entre chaque graduation est égal à 1 (les traits de graduation correspondant aux nombres 0 et 1 permettent de l'affirmer).

Si l'on veut placer le point B d'abscisse 2,7, la tâche est plus complexe puisqu'il faut partager le segment entre 2 et 3 en dixièmes.

Remarques **:**

Il est impossible placer le point C d'abscisse 3,64 avec exactitude, car on ne peut pas percevoir les centièmes sur l'axe donné.

On peut simplement donner sa localisation approximative : entre les points d'abscisses 3,6 et 3,7 ;
Il est impossible de placer le point d'abscisse - 6, car l'axe est trop court.

L'origine de l'axe n'est pas toujours visible sur la figure ; il est cependant parfois possible de placer un point d'abscisse donnée.

c- Ordonnée :

Un repère du plan est constitué de deux axes ayant la même origine, généralement **perpendiculaires**. L'axe « **horizontal** » est l'axe des abscisses et l'axe « **vertical** » est l'axe des **ordonnées**.

Les coordonnées d'un point sont deux nombres classés dans un ordre précis :

- le premier nombre s'appelle l'abscisse du point ;
- le deuxième nombre s'appelle l'ordonnée du point.

Comment placer un point dont on connaît les coordonnées dans un plan muni d'un repère ?

Exemple 1 :

On veut placer le point A de coordonnées 3 et 2.
L'abscisse de A est égale à 3 et son ordonnée est égale à 3.

Première étape : on repère 3 sur l'axe des abscisses et 2 sur l'axe des ordonnées.

Deuxième étape : on trace des droites parallèles aux axes passant par les traits de graduation correspondant à 3 et à 2. À l'intersection de ces droites se trouve le point A.

Exemple 2 :

On veut placer le point B de coordonnées -4 et -3.

L'abscisse de B est égale à -4 et son ordonnée est égale à -3.

Remarques :

Si un point a une abscisse égale à 0, alors ce point est sur l'axe des ordonnées.
Si un point a une ordonnée égale à 0, alors ce point est sur l'axe des abscisses.
On peut aussi placer des points dont les coordonnées ne sont pas des entiers.