LE DIVISEUR ET MULTIPLE

I- Généralité :

On appelle **division euclidienne**, du nom du mathématicien grec **Euclide**, la division de deux nombres entiers naturels dont le quotient et donc le reste sont aussi des entiers.

Qu'est-ce qu'un diviseur dans le cadre de la division euclidienne ?

1- Définitions :

Soient a et b deux nombres entiers.

On dit que b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre entier q tel que $a = b \times q$.
On dit aussi que a est un **multiple** de b, ou que a est **divisible** par b.

Remarques :

Dire que b est un diviseur de a revient à dire que la division euclidienne (donc à quotient entier) de a par b a pour reste 0.

Dans ce cas, on peut donc écrire $a = b \times q$, où q est le quotient de a par b ; certaines calculatrices ont une touche permettant d'effectuer les divisions euclidiennes ; on peut alors lire le quotient et le reste de la division à l'écran.

Exemple : 13 et 7 sont-ils des diviseurs de 221 ?

On effectue les divisions euclidiennes de 221 par 13, puis de 221 par 7 :

$221 = 13 \times 17$, donc 13 est un diviseur de 221.

$221 = 31 \times 7 + 4$, donc 7 n'est pas un diviseur de 221.

2- Critères de divisibilité :

Il n'est pas toujours nécessaire de faire une division pour savoir si un nombre entier est divisible par un autre ; rappelons en effet les règles suivantes :

Un entier divisible par 2 est un entier dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un entier divisible par 3 est un entier dont la somme des chiffres est divisible par 3.

Un entier divisible par 5 est un entier dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Un entier divisible par 9 est un entier dont la somme des chiffres est divisible par 9.
Un entier divisible par 10 est un entier dont le chiffre des unités est 0.
Exemple : d'après ces critères, on peut dire que 975 est divisible par 3 et 5, mais ne l'est ni par 2, ni par 9 ni par 10.

3- Règles :

Si on considère un nombre entier a différent de 0 et de 1, ce nombre a au moins deux diviseurs : **1 et lui-même.**

En effet on a toujours $a = a \times 1$.

Le nombre **1** n'a qu'un diviseur : lui-même.

Le nombre **0** admet tous les nombres entiers comme diviseurs.

Les diviseurs d'un nombre entier non nul peuvent être **associés** : par exemple, on dira que 8 et 9 sont deux diviseurs associés de 72, car 72 est divisible par 8 et par 9, et $72 = 8 \times 9$.

4- Méthode :

Expliquons la méthode à l'aide d'un exemple : recherchons tous les diviseurs de 72. La manière de procéder est la suivante : on divise 72 par tous les nombres entiers successifs : 1, 2, 3, etc.

Lorsque le reste est nul, on écrit l'égalité correspondante et les diviseurs associés obtenus.

Le processus s'arrête car l'égalité suivante, $72 = 9 \times 8$, redonne les diviseurs 8 et 9 déjà obtenus.

Les diviseurs de 72 sont donc : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.

Exemple :

On cherche les diviseurs communs à 72 et 54. Pour cela, on cherche les diviseurs de chacun de ces nombres en utilisant la méthode du paragraphe précédente, puis on extrait les nombres qui figurent dans les deux listes à la fois :

Les diviseurs de 72 sont : **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **8**, **9**, **12**, **18**, **24**, **36** et **72**.

Les diviseurs de 54 sont : **1**, **2**, **3**, **6**, **9**, **18** et **27**.

Les diviseurs communs à 72 et 54 sont donc : **1**, **2**, **3**, **6**, **9** et **18**.

5- Définition du PGCD :

Le **plus grand diviseur commun** à deux nombres entiers est appelé en abrégé le **PGCD** de ces deux entiers.

Exemple : le PGCD de 72 et 54 est 18 (d'après l'exemple du paragraphe précédent). On note : PGCD (72, 54) = 18.
En reprenant la liste des diviseurs communs à 72 et 54 : 1, 2, 3, 6, 9 et 18, on constate que ce sont tous les diviseurs de 18.
Propriété : les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD. Si on connaît le PGCD de deux entiers, il suffit donc de trouver tous ses diviseurs pour avoir les diviseurs communs à ces deux entiers.