ALGEBRE

I- Généralité :

Branche des **mathématiques** qui étudie les propriétés des **ensembles** munis de **lois de composition**.

L'algèbre a connu deux tendances successives : l'**algèbre classique**, calcul sur des objets mathématiques (**nombres**, **matrices**…) représentés par des lettres et en particulier résolution des équations algébriques dans l'ensemble des **réels** ou des **complexes** munis des opérations arithmétiques classiques, puis l'algèbre dite **moderne** (ou simplement l'algèbre) qui étudie les structures algébriques définies sur un ensemble.

Des structures algébriques sont définies axiomatiquement : on dit qu'un ensemble **E d'éléments** (de nature quelconque) est muni d'une structure algébrique lorsque sont définies dans **E** une ou plusieurs lois de composition, internes ou externes, qui jouissent de certaines propriétés concernant soit une loi de composition déterminée, soit les liens entre plusieurs lois de composition.

Les premiers exemples de structures algébriques sont donnés par les exemples de nombres (par exemple l'ensemble des nombres réels) munis des opérations arithmétiques usuelles. Ces opérations jouissent de certaines propriétés formelles qui se retrouvent, en totalité ou en partie, dans les lois de composition définies sur d'autres ensembles d'éléments de nature quelconque (**matrices**, **polygones**, etc.).

On conserve pour ces lois les noms usuels d'**« addition »** et de **« produit »**. Les mots associativité, commutativité, distributivité d'une loi par rapport à une autre ont le même sens que celui qui leur avait été donné pour les **lois + et –** définies pour les nombres réels.

Il en est de même de l'existence d'un **élément neutre (« zéro »**) pour une loi notée **additivement**, unité pour une loi notée **multiplicativement** avec des propriétés respectivement analogues à celles des nombres **0** et **1**), de l'existence d'un élément inverse (appelé **« opposé »** dans le cas d'une loi notée additivement) avec des propriétés analogues à celles de l'inverse (ou de l'opposé) d'un nombre.

Suivant le nombre de lois composition qui sont définies sur un ensemble et les propriétés formelles postulées pour elles, on définit différents types de **structures** algébriques. Parmi les structures élémentaires, citons : celle de groupe (ensemble muni d'une loi de composition associative pour laquelle il existe un élément neutre et telle que tout élément admette un inverse ; si la loi est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien) ; celle d'anneau (ensemble muni de deux lois de composition, l'une notée additivement pour laquelle il est un groupe commutatif, l'autre notée multiplicativement et liée à la première par des **axiomes** convenablement choisis ; si la seconde loi – le **produit** – est commutative, l'anneau est dit commutatif) ; celle du corps (anneau dans lequel tout élément non nul admet un inverse).

Une structure importante en raison de ses applications dans les calculateurs électroniques est la structure d'algèbre de **Boole**. Il s'agit d'une structure sur un ensemble : deux lois de composition sont définies ; elles possèdent les mêmes propriétés formelles que les opérations de **réunion** et d'**intersection** dans la théorie des ensembles.

A partir de structures élémentaires, on définit d'autres structures algébriques. En particulier la structure de corps (qui constitue le cadre naturel pour la résolution des équations) est à la base de la structure d'espace **vectoriel**, les espaces vectoriels étant eux-mêmes à la base de toute l'**algèbre linéaire** qui comprend, entre autres, la **théorie des matrices** et la résolution des systèmes d'**équations linéaires**.

II- Algèbre linéaire :

L'algèbre linéaire est la partie des mathématiques qui étudie les **espaces vectoriels** (de dimension finie ou non), les **applications linéaires** entre espaces vectoriels, les **matrices**, les systèmes d'**équations algébriques linaires**.

III- Structure :

Une algèbre sur un corps commutatif **K** est un ensemble **A** muni d'une structure d'anneau et d'une loi de multiplication par les éléments de **K** en sorte que l'addition dans l'anneau et la multiplication par les éléments de **K** définissent **A** sur une structure d'espace vectoriel sur **K**.

De plus, (**ax**) **y = a (xy)** pour tout **a** de **K** et pour tous **x** et **y** de **A**.

L'algèbre est dite commutative si la multiplication dans l'anneau est commutative. Comme exemples d'algèbres, on peut citer l'**algèbre des polynômes**, celles des matrices carrées d'ordre n, celles des applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension n dans lui-même.

Ces deux dernières algèbres sont **isomorphes** entre elles (autrement dit les espaces vectoriels sont isomorphes entre eux ainsi que les anneaux isomorphes).

En général, toute algèbre de dimension finie est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de matrice : ainsi, l'algèbre des nombres complexes est isomorphe à l'algèbre des matrices de type **2x2** de la forme

(a' a'')

Ou a' et a'' sont des nombres réels.

(-a'' a'

Une algèbre est dite normée si elle est munie d'une norme satisfaisant aux deux conditions :

1) La norme de l'élément unité (neutre pour le produit) est égale à **1**,

2) **(xy) < (x) (y) pour tout x et y dans A**.

L'algèbre est dite **complète** si l'espace vectoriel sous-jacent, muni de cette norme est complet. On l'appelle dans ce cas l'algèbre de **Banach**. Un exemple d'algèbre de Banach commutative est donné par l'ensemble des fonctions **holomorphes** sur un disque fermé en prenant comme norme le maximum du module.

Un exemple d'algèbre de Banach non commutative est donné par l'ensemble des applications linéaires continues d'un espace de Banach dans lui-même en prenant comme norme

(L) = sup (L (x) pour (x) < 1.

Dans la théorie des algèbres de Banach interviennent à la fois des propriétés algébriques et des propriétés **topologiques**. Il existe en outre des liens étroits entre les algèbres de Banach complexes et les fonctions holomorphes.